





CORSO INDUSTRIALE

DI

**GEOMETRIA E MECCANICA**

APPLICATE.

LA GEOMETRIA DELLE CURVE.



LA  
**GEOMETRIA DELLE CURVE**

APPLICATA

**ALLE ARTI ED ALLA INDUSTRIA**

AD USO DELLE SCUOLE D'ARTI E MESTIERI,  
DEI SOTTO-UFFICIALI DEL GENIO E DELL'ARTIGLIERIA, DEI CAPI D'OPERE  
E DI MANIFATTURE, DELLE MAESTRANZE E DEGLI ARTIGIANI

**LEZIONI PUBBLICHE**

DETTE NELL'I. E R. ISTITUTO TECNICO DI FIRENZE  
NELL'ANNO SCOLASTICO 1849-50

DAL

**D<sup>e</sup> NICCOLA COLLIGNON**

PROFESSORE SCIENZIATO DELL'I. E R. ACCADEMIA D'ARTI E MANIFATTURE DI FIRENZE,  
SOCIO CORRISPONDENTE DELLA R. ACCADEMIA DEI GEORGOFILI,  
SOCIO ORDINARIO DELL'I. E R. ATENEUM ITALIANO.



VOLUME UNICO.

FIRENZE,

TIPOGRAFIA BARBERA, BIANCHI E C.

1857.



La presente edizione è posta sotto la tutela delle leggi vigenti  
sulla proprietà in materie di stampa.

## AVVERTIMENTO DELL'AUTORE.

le curve  
un'altra.

Quando nell'anno 1842 fui dal Governo Granducale incaricato di sostenere in eriminalmente la Cattedra di *Meccanica applicata* dell' Istituto Tecnico di Firenze, mancava affatto a questa scuola ogni insegnamento matematico che preparasse convenientemente gli studenti. E sebbene elementare fosse il modo, e volgare il linguaggio coi quali mi proponeva di esporre i principii della scienza dell'equilibrio e del moto, e mostrarne le applicazioni alle arti, all'industria ed agli usi della vita, ritenni indispensabile per rendere le mie Lezioni accessibili ad un maggior numero di persone, anco le meno istruite, il presumere nei miei uditori la cognizione almeno delle più importanti discipline geometriche, o premetterle in serie ordinata di lezioni. Quindi s'è mai opportuno l'intraprendere un corso di Geometria elementare il quale riunisse pure diverse applicazioni utili.

Lo studio geometrico della linea retta e del circolo non è il solo necessario per l'intelligenza degli elementi di Mec-

caica, ma talvolta occorre, specialmente nella Teoria dei movimenti, di avere anco una completa cognizione delle curve non contemplate generalmente dalla Geometria elementare. Onde però evitare il caso nell'esporre la Meccanica di richiamarle nuovamente alla memoria degli scienzi, e mostrarle separatamente agli igna tra i miei uditori, e così divagare dal soggetto principale, giudicai conveniente di riunirle in un corpo di Le che facessero appendice a quelle di Geometria ele prima di procedere al corso di Meccanica. Le Lezioni di Geometria delle Curve che vengono alla luce in questo volume, sono appunto quelle, che manoscritte mi servirono di guida per dettarle agli uditori dell'Istituto Tecnico, l'anno scolastico 1849-50, e che concorsero a formare insieme il *Corso industriale di Geometria e Meccanica*, che fu professato pubblicamente dappoi pel corso non interrotto di quattro anni.

Per meglio servire l'ordine delle materie ho aggiunte quattro Lezioni sulla generalità delle curve, nelle quali, premesse le definizioni e nozioni generali, si tratta primieramente della curvatura delle linee e delle superficie curve siccome quella che fa acquistare un'idea più esatta della forma dei corpi in natura, e pone in grado di darla con più facilità ai dotti industriali: e poi si espongono i processi generali per descrivere e costruire qualunque curva tanto geometricamente che meccanicamente; e si danno le regole per rettificare e misurare le curve, per riquadrare le superficie piane terminate da curve, e le superficie curve, e per ricubare i solidi. Le sezioni coniche, cioè la *Parabola*, la *Ellisse* e la *Iperbola*, essendo fra tutte le curve quelle che godono di un maggior numero di proprietà,



e sono più feconde di applicazioni in ogni ramo di industria, richiedevano nell' esporle una maggiore estensione; perciò sono stato obbligato di impiegarvi non meno di nove Lezioni. Nelle rimanenti ho trattate successivamente tutte le altre curve che non sono tanto conosciute come le sezioni coniche, ma non per questo sono meno importanti in alcuni casi dell' arte di edificare e della costruzione delle macchine. Così nelle Lezioni XIV e XV ho esposto la *Cassinoide*, la *Catenaria* e la *Lemniscata*, nella XVI ho parlato delle *Spirali piane*, nelle XVII, XVIII si contengono le curve generate dalla rotazione di una curva sopra un' altra, cioè le *Evolventi*, le *Cicloidi* e le *Epicycloidi*; la XIX abbraccia la *Sinusoide*, la *Concoide* e le *Curve di estradosso*, e finalmente nella XX ho trattato delle *Eliche*. In tutte queste curve ho singolarmente tenuto lo stesso ordine di esposizione indicato in genere per le prime quattro Lezioni, oltre di che ho fatta conoscere per ciascuna la generazione, ho dimostrate le principali proprietà, ho insegnate le regole per condurre le tangenti e le normali, ho considerato le più importanti applicazioni ed ho data una idea degli stromenti per costruirle.

I medesimi motivi che mi hanno impegnato nella pubblicazione di queste lezioni mi hanno indotto altresì a conservare l' originalità con cui furono improntate; ciò nonostante, ove alle materie conveniva di dare più chiarezza e maggiore sviluppo, ho fatte varie correzioni e molte aggiunte. E nelle note apposte a piè di pagina ho date alcune dimostrazioni e diverse nozioni e spiegazioni che dall' indole del testo non erano consentite, e che ser-

viranno per quei lettori forniti specialmente di quelle cognizioni elementari di matematica, che non ammessi nei miei uditori. Alla fine del volume ho aggiunte delle note separate, fra le quali ho esposto vari metodi generali per la costruzione delle Tangenti e delle Normali, che potrebbero far seguito al § 22 della prima Lezione sulle Curve in generale.

Qui mi gode l'animo di mostrare come io vada debitore all'intelligenza del Tipografo per avermi secondato nella pubblicazione del mio lavoro, con una corretta ed elegante edizione, e di render lode all'incisore signor Raffaello Foggi, che ha saputo con accuratezza riprodurmi i disegni delle figure.

Le materie che costituiscono il corso di queste Lezioni non essendo che la ripetizione di cose elementari e ben note, non presumo alcun merito nell'averle redatte; ma pure se qualcosa mi appartiene, spero che il Lettore intelligente ed imparziale saprà distinguerlo da ciò che non è mio, e giudicherà intanto del modo col quale, animato dal sentimento del dovere e dalla mia sola volontà, disimpegnai una parte dell'insegnamento affidatomi.

---

## TAVOLA DI CORREZIONI ED AGGIUNTE.

Essendo difficile nelle opere d' indole matematica l' evitare alcuni errori indipendenti dall' abilità del Tipografo, lo studente è invitato ad eseguire nei luoghi sotto-indicati, avanti di intraprendere la lettura di ciascun paragrafo del libro, le seguenti correzioni ed aggiunte, senza di che potrebbe incontrare talvolta delle difficoltà nella intelligenza delle materie.

### ERRORI

### CORREZIONI

Pag. lin.

5	14	nei punti $M' M' M''$ , ec.	nei punti $M', M'', M'''$ , ec.
20	31	dal punto, $A'$	dal punto $A$
23	29	parallela ad $B B'$	parallela a $BB'$
57	4	l' asse $VO$	l' asse $VC$
60	1	parallelo	parallela
61	12	lato $VB$	lato $VD$
62	1	due nappe	due branche
81			Nella fig. 80 si ponga la lettera $F$ che indichi il fuoco e nella 81 si pongano i numeri 1, 2, 3, 4, ec., per indicare sull' asse l' incontro delle perpendicolari condottevi dai punti $a', b', c'$ , ec.
84	15	sonori	armonici
85	14	dal punto $M'$	dal punto d' incontro $M'$
87			Nella fig. 86 invece di $S$ posta al piede dell' ordinata condotta da $N$ si ponga $s$ .

ERRORI

CORREZIONI

Pag.	lin.	ERRORI	CORREZIONI
88	8	$CO = CF + EO = dc + OG$	$CO = CF + FO = dC + OG$
89	22	$SB^2 (Bq - Bp)$	$\overline{SB}^2 (Bq - Bp)$
"	23	$SB^2 = Bq \cdot Bp$	$\overline{SB}^2 = Bq \cdot Bp$
"	26	la tangente NT	la tangente mT
"	29	$SB^2 = BR \times BR = BR$ , e quindi $SB = BR...$	$\overline{TB}^2 = BR \times BR = \overline{BR}^2$ , e quindi $TB = BR$
"	30	$SR = SB + BR = 2BR$	$TR = TB + BR = 2BR$
97	2	si numerino le	si numerino progressivamente le
100	25	$\therefore (AP + AS)(AP - AO)$	$\therefore (AP + AS)(AP - AO)$
102	3	del	della
103	3	nel vertice P dell'angolo	nel vertice dell'angolo
105	7	un parallelogrammo FBRC	un quadrilatero FBRC
"	21	del parallelogrammo	del quadrilatero
110	46	del settore ANM	del segmento ANM
116	13	di un	di una
117	18	centrano; nella	centrano nella
119	25	$y^2$ a $px$ . $V = \frac{\pi}{2} \cdot \pi y^2$ ;	$y^2$ a $px$ avremo un altro valore $V = \frac{\pi}{2} \cdot \pi y^2$ ;
120	25	condotta	condotto
122	25	$\overline{CA}^2 - aP \times PA \cdot \overline{CB}^2 - \overline{MP}^2$ ;	$\overline{CA}^2 - aP \times PA \cdot \overline{CB}^2 - \overline{MP}^2$ ;
123	14	<i>sono inversamente pro-</i> <i>porzionali alle</i>	<i>crescono o scemano collo scemare o</i> <i>col crescere delle</i>
124			Nella fig. 115 si ponga $b$ all'estre-
			mità inferiore del piccolo asse
			e C nel centro
"	19	$MP^2$	$\overline{MP}^2$
"	24	$\overline{MP}^2 = \frac{\overline{CB}^2}{eA} \overline{CA}^2 - \overline{CP}^2 -$	$\overline{MP}^2 = \frac{\overline{CB}^2}{CA} (\overline{CA}^2 - \overline{CP}^2) =$
135	33	<i>ang. f'Mn = ang. F'MN</i>	<i>ang. f'Mn = ang. F'Mn</i>
138	21	uguali; per costruzione;	uguali per costruzione
141	7	<i>Due corde qualunque</i>	<i>Due corde parallele qualunque</i>
149	26	$OMD = ODM$	$CMQ = ODM$
152	10	AB	ABD
"	12	due corde	due corde parallele
"	20	conducendo eE	conducendo eE parallela ad AB

ERRORI

CORREZIONI

Pag.	lin.		
155	6	in punti	i punti
157	44	$p, p', p'', p''',$ ec.	$p, p', p'', p''',$ ec. per centri
163	12	allo AD	allo spigolo AD
164	9	(§ 211)	(§ 210) fig. 147
176	26	$\therefore$ CBGA ;	$\therefore$ CB ; CA :
178	26	del	pel
187	9	scer	scere
209	43	Preso un punto P	Da un punto P preso
»	44	si descriva	si descriva col raggio PR
218	43	(§ 288)	(§ 286)
219	8	dalla	della
221	21	confonderanno	confondono
226	32	$dp, qQ, \text{ } \cap D,$	$dq, qQ, QD,$
227	28	Dq	DQ
229	14	PpMm	PpMN
230	15	Dp'	Dp'
238	7	C2 C3,	C2, C3,
239	16	il centro c	il centro C
»	29	nell' asta	dell' asta
245	6	...Cm	...Cm <sub>12</sub>
246	28	$P = R_{n+1} - R_n = \frac{2\pi \cdot p}{R_{n+1} + R_n}$	$P = R_{n+1} - R_n = \frac{2\pi \cdot p}{R_{n+1} + R_n}$
255	12	arco AM	arco AN
»	47	curva AMC	curva AMD
274	6	4 e $\frac{2}{7}$	4 e $\frac{4}{7}$
»	30	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{4}$
281	28	C <sub>3</sub>	c <sub>3</sub>
313	23	AMBC	YABMCX
315	4	YABMCX	YABMCX
317	22	b'B	b'D



# LA GEOMETRIA DELLE CURVE.

---

## DELLE CURVE IN GENERALE

### LEZIONE PRIMA.

*Definizioni — Curvatura delle linee — Curvatura della superficie.*

**Definizioni.** — 1. La traccia continua, che si supponga generata da un punto geometrico moventesi in successive e diverse *direzioni*, si chiama *linea*.

2. La linea è *retta* ove la direzione si mantiene costantemente la stessa per la durata di moto del punto generatore. La linea è *curva* quando la direzione varia in ciascun istante per ogni mutazione di luogo.

3. E siccome la direzione può esser variabile in modi infiniti, è adunque chiaro che le linee rette costituiscono una sola specie, ed invece esiste una infinità di linee curve differenti.

4. Le curve che applicate sopra un piano vi combaciano in tutta la loro estensione, diconsi *piane*, o a *semplice curvatura*. Le altre che non godono di questa proprietà, presentano due curvatures, e son dette a *doppia curvatura*.

5. Ambedue poi si distinguono in *curve rientranti* o *chiuse* se un punto può continuamente tornare a percorrerle e racchiudono spazio, ed in *curve aperte* quando da ogni parte prolungate all' infinito non racchiudono spazio.

6. Per esempio: Il circolo, la più semplice fra tutte le curve, è una *curva piana e chiusa*: un getto d'acqua descrive una *curva piana ed aperta*: la linea di intersezione di due tubi cilindrici è una *curva chiusa a doppia curvatura*; e lo spigolo dei pani di una vite è formato da una *curva aperta a doppia curvatura*.

7. La concavità di una curva si considera da quella parte verso la quale si succedono i cangiamenti di direzione: la convessità si riferisce alla parte opposta ove si può condurre una tangente alla curva; così la curva MN (fig. 1) rivolge la sua concavità alla linea CD e presenta la sua convessità alla linea AB.



Fig. 1.

8. Talvolta le curve dopo aver rivolta per qualche tratto la loro concavità, invertita la curvatura, vi oppongono la convessità e viceversa. Il punto singolare<sup>1</sup> ove accade questa inversione, e che è il confine della concavità e della convessità, si chiama *punto d'inflexione*. Così la curva ABC (fig. 2) ha nel punto B, ove si inverte la curvatura, un punto di inflessione, ed è concava da A in B convessa da B in C e viceversa.



Fig. 2.

9. Noi sappiamo che una superficie è un *piano* quando una linea retta postavi in tutti i sensi vi combacia interamente. Ogni altra superficie in cui non si riscontri questa proprietà è *curvilinea*.

10. Le superficie curvilinee prominenti in un corpo si dicono *convesse*, e per un punto qualunque di esse si può condurre un piano tangente; al contrario le depresse si chiamano *concave*. Le une come le altre sono *a semplice* o *a doppia*

<sup>1</sup> La Geometria chiama punti singolari di una curva quelli che soddisfano a condizioni particolari della medesima, e sono i nodi, i punti multipli, di regresso e d'inflexione.



*curvatura* se incurvate in un sol senso o in più: così le superficie cilindriche e coniche sono a semplice curvatura, e le sferoidiche a doppia curvatura.

11. In generale, ove le intersezioni  $AB$ ,  $CD$  (*fig. 3*) di



Fig. 3.



Fig. 4.

due piani  $MN$ ,  $PQ$  secanti una superficie curva  $ACBD$  si tagliano, ed hanno la concavità o la convessità rivolta verso la stessa parte, la superficie è concava o convessa (§ 40), ma ove la concavità della una sia opposta alla convessità dell'altra, (*fig. 4*) la superficie partecipa di

ambidue, e si dice *concava-convessa*. Tale è la superficie di alcune parti di una nave, di una sella da cavalcare, del canale esterno di una carrucola ec.

12. Una superficie curva  $ABEF$  (*fig. 5*) può in generale



Fig. 5.

supporsi generata da una linea  $AB$  che, movendosi con qualsivoglia legge sopra una seconda linea  $CD$  fissa rispetto alla prima, lascia dietro a se una traccia continua. La linea mobile  $AB$  si chiama *generatrice*, e l'altra fissa  $CD$  che dirige il movimento si dice *direttrice*.

13. Quando la direttrice è la circonferenza  $ACB$  (*fig. 6*)



Fig. 6

di un circolo attraversato perpendicolarmente nel centro da una linea retta  $MN$ , e la generatrice è una curva piana  $OP$  qualunque, girevole intorno alla retta  $MN$ , in modo che ciascuno dei suoi punti mantenga la stessa distanza dalla medesima; la retta  $MN$ , la superficie generata e lo spazio da essa compreso si chiamano *asse*, *superficie*, e *solido di rivoluzione*.

Se la linea generatrice delle superficie e dei solidi di rivo-

luzione si cangia in una linea retta parallela, o inclinata sotto un angolo qualunque all'asse, o in una mezza circonferenza, il cui diametro sia l'asse stesso, ne otterremo i tre corpi rotondi, cioè il cilindro, o il cono, o la sfera, dei quali già trattammo nelle nostre lezioni di Geometria elementare.

14. Finalmente chiameremo superficie sviluppabili quelle che possono essere applicate, distese, spicgate, in una parola sviluppate sopra un piano in modo che vi combacino in tutte le sue parti senza fendersi o allungarsi, senza sovrapporsi o accorciarsi. Sono rigorosamente tali soltanto le superficie a semplice curvatura (§ 10), cioè di natura cilindrica, o conica, o cilindro-conica. In generale tutte le superficie di rivoluzione generate da una curva non sono sviluppabili; però una superficie non sviluppabile può svilupparsi con metodi di approssimazione.

Nelle nostre lezioni di Geometria elementare esponemmo la dottrina delle superficie sviluppabili e non sviluppabili, e vedemmo quanta ne sia estesa l'applicazione alle arti, e quanti vantaggi ricavi l'industria nella soluzione geometrica di questioni ad essa relative. Questo non è luogo di ripetere simile esposizione, e basti a noi l'aver rammentato una tale specie di superficie.

15. In queste lezioni ci occuperemo soprattutto delle curve piane. Tutte le verità geometriche che si riferiscono alla linea retta ed al circolo, di cui lo studio, e le applicazioni sono state l'oggetto delle precedenti lezioni di Geometria elementare, all'uopo le richiameremo come dimostrate. Le linee poi a doppia curvatura richiedono considerazioni non abbastanza elementari perchè possano convenire interamente all'indole di questo libro, e la loro applicazione ai lavori d'industria non essendo tanto frequente, ci limiteremo a quello che può esser d'uso nelle Arti e di utilità agli Artisti.

**Curvatura delle linee.** — 16. Per indicare il modo di valutare la curvatura delle linee e delle superficie è d'uopo far precedere alcune idee sulla curvatura del circolo. Un punto *M*,

potendo moversi sopra la circonferenza di un circolo  $MM'OC$



Fig. 7.

(fig. 7) di raggio qualunque  $CM$  senza allontanarsene, percorra un arco  $MM'$  anco infinitamente piccolo; tirata la corda  $MM'$  si osservi che il punto  $M$  giunto in  $M'$  avrà deviato dalla direzione della tangente  $MT$ , condotta in  $M$ , dell'angolo  $M'MT$ ; perciò all'ampiezza dell'angolo  $M'MT$  potrà riferirsi il valore della curvatura dell'arco  $MM'$ .

Ora se il punto  $M$  percorre successivamente gli spazi o archi  $M'M''$ ,  $M''M'''$ ,  $M'''M''''$ , ec., uguali all'arco già descritto  $MM'$ , condotte le corde  $M'M''$ ,  $M''M'''$ ,  $M'''M''''$ , ec., e le tangenti  $M'T'$ ,  $M''T''$ ,  $M'''T'''$ , ec. nei punti  $M'$ ,  $M''$ ,  $M'''$ , ec., gli angoli  $M''M'T'$ ,  $M'''M''T''$ ,  $M''''M'''T'''$ , ec., daranno il valore della curvatura dei rispettivi archi  $M'M''$ ,  $M''M'''$ ,  $M'''M''''$  ec.; ma gli angoli  $M'MT$ ,  $M''M'T'$ ,  $M'''M''T''$ ,  $M''''M'''T'''$ , ec. essendo rispettivamente misurati dalla metà degli archi  $MM'$ ,  $M'M''$ ,  $M''M'''$ ,  $M'''M''''$  ec. tutti eguali fra loro, sono uguali; dunque gli archi  $MM'$ ,  $M'M''$ ,  $M''M'''$ ,  $M'''M''''$ , ec. hanno la curvatura uguale, cioè *la curvatura di un circolo è sempre la medesima in qualunque siasi punto della sua circonferenza.*

17. Esempi. Un uomo che vuole camminare sul margine di una peschiera circolare se procede coi medesimi passi percorrerà spazi uguali, e ad ogni passo si discosterà della medesima quantità dalla tangente verso cui dirige lo sguardo, e perciò senza accorgersene eserciterà sempre il medesimo atto per volgersi verso il centro della peschiera a fine di mantenersi sul suo cammino. Un cavaliere che voglia far descrivere al suo cavallo un circolo farà sì di deviare ad ogni passo del medesimo spazio dalla direzione della tangente, ed a tale effetto userà il medesimo sforzo per obbligare il cavallo a volgersi ugualmente verso il centro del circolo che vuole descrivere

18. Sopra due cerchi (fig. 8) dei quali il raggio  $cm$  sia minore



Fig. 8

del raggio  $C M$ , si prendano due archi  $mm'$ ,  $M M'$  uguali fra loro in lunghezza. Condotte le corde  $mm'$ ,  $M M'$  e le tangenti  $mt$ ,  $M T$ , gli angoli  $m' m t$ ,  $M' M T$  indicheranno la curvatura degli archi rispettivi  $mm'$ ,  $M M'$ ; (§ 16) ma come l'angolo al centro  $m' c m$  misurato dall'arco  $mm'$  di raggio minore è maggiore dell'angolo al centro  $M' C M$  misurato dall'arco  $M M'$  di raggio maggiore, l'angolo  $m' m t$  è maggiore dell'angolo  $M' M T$ ; dunque la curvatura di due

cerchi sta in ragione inversa della grandezza dei loro raggi.<sup>1</sup> Per questo appunto se il raggio di un circolo è grandissimo la sua curvatura sarà piccolissima, ed apparirà insensibile. E da tutto ciò finalmente si concluderà che la misura della curvatura del circolo è data dalla grandezza del raggio.

19. Il raggio della terra essendo lungo più di sei milioni di metri, uno dei cerchi massimi della medesima, come l'*equatore* o un *meridiano*, è meno curvato un milione di volte di un circolo che avesse sei metri di raggio, e dodici milioni di volte di

<sup>1</sup> Volendo con rigore algebrico dimostrare questa proposizione, si chiamino  $R, r$  i raggi di due cerchi,  $l$  la lunghezza degli archi  $M M'$ ,  $mm'$ , sieno  $N, n$  i numeri dei loro gradi,  $A, a$  gli angoli formati dalle tangenti con le corde ed avremo

$$\left\{ \begin{array}{l} N : 360^\circ :: l : 2 \pi R \\ n : 360^\circ :: l : 2 \pi r \end{array} \right.$$

ove  $\pi$  è il noto rapporto della circonferenza al diametro, e dalle quali se ne trae

$$N : n :: r : R :$$

ma chiamando  $C, c$  le curvature degli archi  $M M'$ ,  $mm'$  ovvero dei rispettivi cerchi si ha

$$N : n :: A : a :: C : c$$

dunque sarà sempre

$$C : c :: r : R$$

come si voleva dimostrare.

una rota di carrozza che abbia mezzo metro di raggio; perciò la curvatura della terra ci appare insensibile a brevi distanze, e soltanto nei grandi spazi del mare su cui può estendersi la nostra vista, l'occhio il meno esercitato distingue una leggera curvatura.

20. Premesso che il raggio dà la misura della curvatura del circolo, vediamo come questo sia stato dalla Geometria felicemente applicato a misurare la curvatura delle altre linee curve di qualsivoglia specie. Sopra una curva qualunque  $MN$  (fig. 9)



Fig. 9.

di cui si vuole conoscere la curvatura, si prendano tre punti consecutivi  $a, b, c$  vicinissimi fra loro, pei quali si faccia passare la circonferenza di un cerchio di cui il centro sia  $C$  ed il raggio  $Ca$ . Quanto più i punti  $a, b, c$  saranno vicini fra loro, tanto più l'arco  $ac$  di questo

cerchio si confonderà con l'arco  $abc$  della curva  $MN$ , della quale fra i punti  $a, c$  la curvatura sarà la medesima del circolo, e perciò ugualmente misurata dal raggio  $Ca$ . Se si considerano altri tre punti consecutivi  $c, d, e$ , pei quali si faccia passare una seconda circonferenza di raggio  $cC'$  fra i punti  $c, d, e$ , il secondo circolo e la curva avranno la stessa curvatura misurata dal raggio  $cC'$ . In simil guisa operando successivamente di tre in tre punti per tutta la estensione della curva, otterremo una serie di archi di cerchio, che rappresenterà la linea  $MN$  e ad essa potrà sostituirsi. Adunque poichè la curvatura dei circoli è in ragione inversa della grandezza dei raggi (§ 18), la curvatura di una linea qualunque  $MN$  sarà valutata dalla misura dei raggi dei diversi archi condotti nel modo insegnato.

21. Quel circolo  $abcC$  condotto a contatto di un punto di una curva  $MN$  e che ha la medesima curvatura di una porzione  $abc$  di essa, chiamasi dai geometri *circolo osculatore*. Il rag-

gio a C di questo circolo si dice *raggio di curvatura*, e finalmente il suo centro C è detto *centro di curvatura*.

22. Conducendo ad un punto P (fig. 10) di un circolo osculatore della curva MN la tangente PT, questa sarà pur tangente alla curva; e siccome la tangente al cerchio è perpendicolare al raggio condotto nel punto di contatto, il raggio di curvatura sarà perpendicolare o *normale* alla periferia del circolo osculatore, ossia alla curva MN, nel punto P. Si osservi una volta per sempre



Fig. 10.

che quando il punto di contatto è quello p di unione di due archi osculatori (fig. 10, 11) la retta *pt* sarà tangente comune; i raggi di curvatura si troveranno sulla linea che passa pei centri C, c; e la distanza C c dei centri sarà la differenza dei raggi (fig. 10) se la curva è totalmente convessa o concava; la somma (fig. 11) se p è un punto d'inflessione (§ 8); perciò gli archi osculatori presenteranno la stessa continuità dell'andamento della curva senza formare angolo di sorta.



Fig. 11.

Il saper condurre la normale o la tangente ad una curva è della più grande importanza per le arti. Per csempio è necessario all'architettura stabilire la direzione delle commettiture

dei cunei di un arco, le quali non sono che le normali al profilo curvilineo di esso. Sebbene per ogni curva vi sia un qualche metodo particolare, si può in generale condurre una *tangente* o una *normale* ad un punto di una curva determinando il raggio di curvatura corrispondente al punto stesso, ed elevando su questo una perpendicolare; il raggio sarà la normale, e la perpendicolare sarà la tangente.

23. Rispetto alle linee a *doppia curvatura* (§ 4) basti l'accennare che la loro curvatura può esser misurata dal circolo in un modo analogo; se non che i circoli osculatori di una *curva a semplice curvatura* sono situati nel suo medesimo piano, mentre quelli di una *curva a doppia curvatura* sono collocati in piani differenti; imperocchè una curva a doppia curvatura MN (fig. 12) non potendo



Fig. 12.

applicarsi sopra un piano, due archi consecutivi AP, Pa, o i rispettivi circoli osculatori, si troveranno in piani diversi inclinati fra loro, ed aventi la tangente TPt, condotta al punto di congiunzione P, per linea di loro comune intersezione. Quel piano su cui si trova il cerchio che misura la curvatura di ciascun arco della linea chiamasi *piano osculatore*. E siccome i raggi di curvatura CP, cP sono perpendicolari alla tangente TPt (§ 22) nel punto P, l'angolo CPc misurerà l'inclinazione dei piani osculatori dei due archi consecutivi AP, Pa; e così giungeremo a valutare interamente la curvatura delle linee a doppia curvatura conoscendo altresì la posizione dei piani osculatori.<sup>1</sup>

**Curvatura delle superficie.** — 24. Come il circolo serve a valutare la curvatura delle linee, serve altresì a valutare

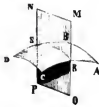


Fig. 13.

la curvatura delle superficie. Facilmente si comprende che tagliando una superficie curva qualunque ABCD (fig. 13) con un piano MNPO, la linea d'intersezione RS è una curva piana, della quale facile ci sarà determinare i raggi di curvatura (§§ 20, 21) posti tutti sul piano MNPO, e quindi conoscere la curvatura della linea RS, che ivi coinciderà con quella della superficie, e che si dice *linea di cur-*

<sup>1</sup> Alla geometria descrittiva appartiene l'insegnare le regole per determinare la posizione di due piani che si tagliano.

*vatura*. Ora conducendo più piani secanti, avremo altrettante linee segnate sulla superficie, delle quali conosceremo pure la curvatura. Adunque la curvatura delle linee tracciate sopra una superficie secondo le condizioni volute dall' indole e rigore della ricerca, ci darà piena cognizione della curvatura della intera superficie.

25. Le superficie rapporto alla loro curvatura si dividono in tre classi ben distinte fra loro, che giova indicare.

26. Nella prima classe la curvatura di ciascuna delle linee che possono disegnarsi sopra ogni superficie, è diretta nello stesso verso, cioè le superficie sono interamente concave, o convesse (§ 11), ed il centro di curvatura è situato sempre dalla parte della concavità.

La superficie sferica, quella di una vela gonfiata dal vento, dei globi aereostatici, delle cupole, dei pomi, dei corpi di forma ovale, del bozzolo ec., si comprendono in questa classe.

27. La curvatura della superficie sferica è quella che si misura più facilmente di ogni altra. Tutte le sezioni che possono farsi all' infinito pel centro di una sfera sono tutti circoli uguali fra loro e concentrici; ma essi hanno la loro curvatura uguale in ogni suo punto ed in ragione inversa del raggio (§§ 16, 18); dunque la curvatura della sfera è la medesima in tutti i suoi punti ed in ragione inversa del proprio raggio.

28. Nella seconda classe la curvatura di un sistema di linee disegnate sopra ciascuna superficie è nulla, cioè quelle linee sono rette. Si comprendono in questa classe tutte le superficie a semplice curvatura (§ 10) o sviluppabili (§ 14). La loro curvatura è zero nel senso della generatrice rettilinea, mentre ne hanno una più o meno distinta nel senso della direttrice (§ 13). Nelle superficie d' indole unicamente cilindrica (*fig. 14*) la direttrice o base *abc*, è uguale ad ogni sezione *ABC* parallela ad essa, ed ha la medesima cur-



Fig. 14.



vatura; ma nelle superficie di natura unicamente conica, ove ogni sezione  $abc$  (fig. 45) parallela alla base  $ABC$  è a lei simile, la curvatura è in ragione inversa della sua distanza dal vertice  $V$ ; ossia è sempre maggiore andando dalla base al vertice.



Fig. 15.

29. La terza classe infine comprende le superficie che hanno porzioni della loro curvatura oppostamente rivolte fra loro; cioè il centro di curvatura delle intersezioni fatte in un senso si trova da un lato della superficie, mentre quello delle intersezioni fatte nell'altro senso trovasi nel lato opposto; e che noi abbiamo già chiamate concave-convesse (§ 11, fig. 4).

30. Per esempio, la superficie della scanalatura di una carrucola (fig. 46) ha la sua curvatura circolare di-



Fig. 16.

retta in senso perpendicolare all'asse della ruota, col suo centro di curvatura situato sull'asse stesso, mentre nel senso dell'asse ha la curvatura col centro posto al di fuori della medesima.

31. Nelle superficie componenti le classi rammentate esistono sempre due linee di curvatura (§ 24), una delle quali fra tutte gode della maggior curvatura, e si dice linea di *massima curvatura*, e l'altra della minor curvatura, e si dice linea di *minima curvatura*.

Tutte le linee di curvatura, descritte in condizioni analoghe alle linee di massima e di minima curvatura, copriranno interamente la superficie, e costituiranno rispettivamente il sistema delle linee di massima curvatura, ed il sistema delle linee di minima curvatura.

Ci limiteremo ad accennare, senza darne dimostrazione, che le linee di massima curvatura saranno sempre perpendicolari a quelle di minima.

32. Nelle superficie sferiche, come in quella della terra, i

meridiani formano il sistema delle linee di minima curvatura, ed i paralleli quello di massima curvatura, ed i primi sono perpendicolari ai secondi.

Nelle superficie cilindrica e conica, i lati o spigoli sono le linee di minima curvatura, e le sezioni fatte da' piani perpendicolari all'asse sono le linee di massima curvatura; ed è noto che gli spigoli sono perpendicolari alle sezioni. Nella superficie del canale di una carrucola le sezioni dei piani che passano per l'asse costituiscono le linee di massima curvatura, e quelle che gli sono perpendicolari le linee di minima.

33. La Geometria dimostra, e noi semplicemente enunciamo, che conducendo da ciascun punto di una stessa linea di curvatura una perpendicolare alla superficie, tutte queste perpendicolari formeranno una superficie che sarà necessariamente sviluppabile. Questa preziosa proprietà, come tutte le altre di cui godono le linee di curvatura, è fecondissima di applicazioni alle arti, e specialmente al taglio delle pietre nella costruzione delle volte, onde determinare le superficie di commesso. Ma questo non essendo il nostro assunto, rimandiamo gli studiosi, che desiderassero conoscere la intera dottrina delle linee di curvatura e le sue applicazioni, ai corsi ordinari di Geometria descrittiva, ed a quelli speciali di costruzioni e di disegno geometrico.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> DUPIN, *Développemens de géométrie*. — MONGE, *Géométrie descriptive*. — RONDELET, *Art de bâtir* ec.

## LEZIONE SECONDA.

*Applicazioni della Curvatura — Descrizione e costruzione delle Curve.*

**Applicazioni della curvatura.** — 34. Nella pratica delle arti la determinazione del circolo osculatore e quindi del raggio di curvatura di ogni sezione di una superficie non è priva di utilità. Per eseguire con facilità e precisione le operazioni dei lavori d' industria, spesso si ricorre all' uso degli stromenti, e dei meccanismi, i quali riguardar si possono come la traduzione materiale di metodi generali dettati dalla scienza in regole speciali di pratica. Finora scarsi furono i tentativi dell' arte nella costruzione di stromenti, i quali con facilità si prestino a determinare nei diversi casi il raggio di curvatura di tutte le sezioni che far si possono in una superficie, ma sperando che dall' ingegno degli artisti scaturisca un' invenzione completa per tali ricerche, non vogliamo passare sotto silenzio uno strumento semplicissimo, lo *sferometro di Maiocchi*.<sup>1</sup>

35. Lo sferometro di Maiocchi consiste in una verga rigi-

<sup>1</sup> Lo sferometro come quello di *Cauchois* serve particolarmente a determinare e riconoscere la curvatura della superficie sferica, ma questo strumento come atto a determinare la curvatura di qualunque linea e superficie si potrebbe chiamare più propriamente *curvometro*: nondimeno conserveremo il nome col quale è conosciuto per rispetto all' illustre professore Maiocchi che lo inventò. (Vedi MAIocchi, *Manuale di Geometria per le Arti e Mestieri*, Parte seconda, Cap. I, Sezione III.)

da A B (fig. 17) nel mezzo della quale si muove perpendicolar-

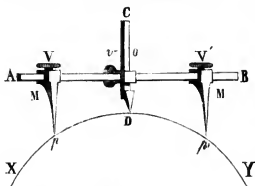


Fig. 17.

mente una seconda verga CD terminata nella punta D, che può altresì assicurarsi in una posizione fissa mediante la vite di pressione  $v$ . Due manicotti M, M' terminati nelle punte  $p, p'$  scor-

rono sulla verga A B al di qua e al di là del punto O e possono mediante le viti di pressione V, V' fissarsi sulla medesima a piacere dell'operatore. La disposizione dello stromento e la perfezione della costruzione devono esser tali che le tre punte  $p, D, p'$  si trovino sempre sopra il medesimo piano qualunque sieno le posizioni dei manicotti M, M' e della verga C D.

36. Per usare dello stromento sopra una linea X  $p$  D  $p'$  Y di curvatura della superficie da sperimentarsi, si segnano due punti  $p, p'$  e vi si appoggiano le punte dei manicotti situandoli a distanze presso che uguali dal punto O, dipoi si scorre la verga C D in modo che la punta D tocchi l'arco  $p p'$ . Fissato invariabilmente il sistema, si trasporta lo stromento applicandolo sopra una superficie piana, come sopra un foglio di carta, e corrispondentemente alle tre punte dello stromento vi si segnano tre punti, pei quali si fa passare la circonferenza di un circolo, che sarà il circolo osculatore dell'arco  $p p'$  della linea di curvatura X  $p$  D  $p'$  Y. Operando analogamente sopra gli archi successivi si otterranno (§§ 20, 21) tutti i circoli osculatori o raggi di curvatura della intera linea di curvatura X  $p$  D  $p'$  Y. In simil guisa potendo determinare i raggi di curvatura delle linee che com-

pongono i sistemi delle linee di massima e minima curvatura (§ 31) giungeremo a conoscere interamente la curvatura di una superficie di ciascuna delle tre classi rammentate (§ 25).

37. Mentre collo sferometro di Maiocchi si perviene convenientemente a determinare la curvatura delle diverse sezioni che compongono una superficie, rimane tuttavia non facile descrivere su questa la traccia di quelle. Nell' assoluto difetto di stromenti che eseguiscono siffatta operazione, crediamo utile di offrire allo studio dei giovani artisti un' idea da porsi in atto colla costruzione di un vero e proprio stromento, il quale si presti a descrivere nel miglior modo le linee di curvatura di una superficie. Si immagini un telaio  $A B C D$  (*fig. 18*) nei lati  $A D$ ,  $B C$  del quale sieno infissi due perni  $P p$ ,  $P' p'$  capaci di sostenere per i suoi poli  $p$ ,  $p'$  un corpo, che noi per semplicità supporremo una sfera  $S$ . Una verga  $V v$  terminata in basso da una materia colorante, come una punta di lapis, scorra verticalmente in un manicotto  $m$  mentre questo può muoversi lungo il lato  $A B$  in modo che le tre punte  $p v p'$  si trovino sempre nello stesso piano. Ora si comprende facilmente che, dando un moto di rotazione alla sfera, per ogni posizione del manicotto

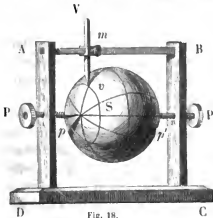


Fig. 18.

la punta  $v$  segnerà sulla superficie sferica un *parallelo*; mentre trasportando il manicotto  $m$  lungo il lato  $A B$ , per ogni diversa posizione della sfera la punta  $v$  segnerà un *mezzo meridiano*. Cosicchè con simil processo giungeremo a segnare tutte le linee componenti i sistemi delle linee di massima

la punta  $v$  segnerà sulla superficie sferica un *parallelo*; mentre trasportando il manicotto  $m$  lungo il lato  $A B$ , per ogni diversa posizione della sfera la punta  $v$  segnerà un *mezzo meridiano*. Cosicchè con simil processo giungeremo a segnare tutte le linee componenti i sistemi delle linee di massima

e minima curvatura della sfera, come di ogni superficie delle tre classi (§ 25).

38. La curvatura delle linee e delle superficie in cui terminano i corpi è una parte della Geometria feconda di considerazioni e di applicazioni, ed il suo studio è di grande importanza ed utilità alle scienze e alle arti auco umili per spiegare e ravvicinare dei fatti, per indurre e conseguir degli effetti.

39. La Storia Naturale coll' aiuto della Geometria studia le varie forme che la natura assegnò mirabilmente ai corpi animati rapporto alle loro condizioni di volare nell' aria, di nuotare nell' acqua, di muoversi sulla terra, studia le forme dei minerali, o delle piante in relazione alla loro formazione, o alla loro vita organica.

40. La Fisica e la Chimica stabiliscono con regole e leggi geometriche la forma degli apparecchi che si prestino, secondo l' indole della loro ricerca, a riprodurre un fenomeno, ad eseguire una operazione.

41. L' Idraulica assegna con rigor geometrico la curvatura della superficie dei corpi destinati a resistere alla velocità di una corrente, a variarne la direzione, a distruggere o modificarne gli effetti.

42. La Meccanica determina le superficie degli organi che entrano nella composizione delle macchine, ed in generale dei corpi che vuole obbedienti alle sue invariabili leggi. Sebbene nella natura si eseguiscano con rara perfezione delle operazioni a cui le nostre arti e mestieri non giungono, o vi giungono oltrepassando appena la mediocrità, la Meccanica tenta d' imitarle studiando i modelli e gli esempi che le offre la stessa natura in analoghe condizioni.

Per esempio: gli animali erbivori hanno i denti perfettamente disposti per triturare le materie vegetabili colle quali si alimentano, e la loro forma è inalterabile malgrado l' attrito continuo che esercitano per la triturazione; mentre la forma delle nostre

macini da molino tosto si guasta, il che ci costringe a correggerla, o rinnovarla onde ottenere il conveniente lavoro. Il signor Molard membro dell'Istituto di Francia si occupò di costruire delle macchine *macinanti*, ove imitando la forma dei denti molari dei cavalli, conservò inalterata quella delle parti destinate a macinare, ed impedì che la triturazione divenisse imperfetta.

43. L'Architettura navale disegna le linee di curvatura della superficie di una nave, onde sodisfaccia alle condizioni richieste dalle leggi del moto e dell'equilibrio, sia per galleggiare e resistere all'impeto dei flutti, sia per fendere le acque con maggior velocità. La natura stessa presenta all'arte nelle forme del corpo dei pesci dei modelli degni di esser profondamente studiati.

44. L'Architettura in generale non è capricciosa nell'assegnare alle sue opere la forma conveniente perchè questa corrisponda alle leggi statiche, e si uniformi alle regole estetiche.

45. La Scultura nello studiare la curvatura delle superficie dei corpi, che deve riprodurre in rilievo, imparerà dei mezzi facili per esercitare il suo occhio, ed eseguire con più esattezza e perfezione i suoi lavori servendosi anco degli appositi stromenti (§§ 36, 37)

Le Arti del Disegno in generale col continuo studio sulla curvatura delle superficie e sull'effetto variato della luce e delle ombre, giungeranno a rappresentare più spedatamente gli oggetti, e gli artisti tutti acquisteranno un maggiore o minor grado di abilità nel giudicare a colpo d'occhio della vera forma dei corpi, che si abitueranno a contemplare di preferenza.

46. L'Agricoltore intelligente curverà le orecchie del suo aratro o coltro nel modo migliore per operare il lavoro, che egli sostituisce a quello più lungo e faticoso delle sue braccia.

L'Optica potrà dare alle lenti ed agli specchi la curvatura corrispondente alle leggi di refrazione e di riflessione.

Il Carroziere curverà le parti di una vettura sodisfacendo al gusto ed al comodo.

Il Valigiaio, il Sarto, il Calzolaio perfino trarranno utilità dalla

conoscenza della vera forma dei corpi per eseguire le vestimenta che li ricuoprano più esattamente.

47. In generale ora si comprenderà di quanta importanza ed utilità sia la dottrina geometrica della curvatura delle linee e delle superficie alle scienze ed alle arti tutte, e quanta facilità gli artefici risentiranno nella esecuzione delle loro operazioni, e quanta esattezza e perfezione arrecheranno ai lavori dell'industria.

**Descrizione delle curve.** — 48. In tutte le curve la Geometria analitica ha scoperte delle particolari proprietà, che la Geometria pratica ha ridotte in regole speciali per la descrizione di ciascuna. In seguito ove sarà il luogo faremo conoscere le une, insegneremo le altre. Però come l'analisi ha potuto rappresentare in termini generali tutte le curve, la Geometria ha stabiliti varii metodi generali a cui sottoporre indistintamente la loro pratica costruzione, e dei quali esponiamo alcuni cenni.

49. Una curva potendo considerarsi rispetto al modo di generazione (§ 1) come composta di una serie di punti contigui e successivi, resta generalmente determinata quando lo sia la posizione di un certo numero dei medesimi. Nelle curve piane si giunge a questa determinazione col principio geometrico, che in un medesimo piano la posizione di un punto è determinata:

1° dalla posizione cognita di due punti :



Fig. 49.

2° dalla posizione cognita di un punto posto su di una linea retta di nota direzione :

3° dalla posizione cognita di due rette che si tagliano.

50. QUESITO PRIMO. *Determinare la posizione di un punto P (fig. 49) che sia distante dal punto A, di una lunghezza AP uguale per esempio a cinque metri, e dal punto B di una lunghezza PB uguale a sette metri. Facendo centro in A e B si descrivano due archi di cerchio col raggio AP uguale a cinque metri e col raggio BP uguale a sette metri; ma ambedue i punti P e P', ove quelli si*



tagliano, soddisfano alla richiesta; Dunque quando venga indicato da qual parte della retta  $AB$  debba trovarsi situato il punto  $P$ , avremo determinata l'unica sua posizione.

51. Or bene: abbiansi due punti  $A$  e  $B$  ed una curva  $abcde$ , su cui si prendano dei punti  $a, b, c, d, e$ , (*fig. 20*) conoscendo le distanze  $aA, bA, cA$ , ec. di essi dal punto  $A$ , e le distanze  $aB, bB, cB$ , ec. dal punto  $B$ , ed operando in un modo analogo alla suddetta soluzione, saremo sempre in grado colle posizioni di  $A$  e di  $B$  di determinare la posizione dei punti  $a, b, c, d, e$  della curva, e quindi l'andamento della curva stessa. Uno dei punti  $B$  di nota posizione può essere fra quelli  $a, B, b, c, d, e$



Fig. 20.



Fig. 21.



Fig. 22.

presi sulla curva (*fig. 21*) senza che varii per questo il modo di determinarli. In ambedue i casi per determinare la posizione di un nuovo punto  $d$  (*fig. 22*) basta in generale far centro in due punti qualunque  $a, B$  scelti fra i determinati e i dati, secondo che l'occhio esercitato dell'operatore gli giudicherà più convenienti, onde ottenere che gli archi si tagliano ad angolo prossimamente retto da distinguere più esattamente il punto  $d$  di intersezione.

52. L'applicazione di questo *metodo delle intersezioni* è facile, e diviene utile in molte operazioni dell'industria che hanno per scopo di costruire una data curva in proporzioni limitate e col solo uso del compasso. Nel disegno geometrico, ove le dimensioni non oltrepassano le ordinarie grandezze di un foglio di carta, sarà preferibile, perchè coi soliti compassi, senza far uso di altri stromenti e moltiplicar linee ed operazioni, tracciamo

facilmente ed unicamente tutte le intersezioni dei cerchi per le quali poi deve passare la curva. L'applicazione di questo metodo si potrà in alcuni casi estendere ai più grandi e grossolani disegni, che il falegname, il pittore, il muratore ec., eseguiscano sopra piani di tavole, sul pavimento, sul muro ec., fin dove lo permetta il maneggio degli stromenti dei quali possono disporre. Ma nelle grandi operazioni della Agrimensura, della Topografia, dell'Arte dell'Ingegnere ec., non è praticabile per gli ostacoli che oppone il terreno, e per la impossibilità di provvedere ai mezzi che si prestino a grandi distanze.

53. È chiaro che la soluzione di questo quesito consiste nella risoluzione di un triangolo per mezzo dei suoi tre lati rappresentati dalla distanza  $AB$  dei punti fissi  $A$  e  $B$ , (fig. 19) e da quelle  $AP$ ,  $BP$  al punto cercato  $P$ , ed il metodo in conseguenza si riduce ad una triangolazione, cioè alla costruzione di un sistema di diversi triangoli aventi per base comune la distanza  $AB$  e per vertici i punti  $a, b, c, d, e$  (fig. 20 e fig. 21); Ma potendo conoscere tre elementi di un triangolo dalla cognizione degli altri tre si risolve quel triangolo colla distanza  $AB$  e cogli angoli adiacenti  $PAB$ ,  $PBA$ ; Dunque la costruzione dei triangoli si può pure effettuare misurando invece, colle regole e cogli stromenti<sup>1</sup> che noi esponemmo nelle nostre lezioni di Geometria elementare, gli angoli formati dalla visuale condotta fra i punti  $A$  e  $B$ , e da quelle condotte dai medesimi a ciascun punto della curva. Così avremo un secondo *metodo delle visuali* applicabile anco alle grandi estensioni di terreno, ove non è impedito condurre visuali.



Fig. 23.

54. QUESITO SECONDO. *Determinare la posizione di un punto  $P$ , che sia distante per esempio 9 metri dal punto,  $A^8$  posto sopra una retta data  $CB$  (fig. 23)*

<sup>1</sup> Come sono la falsa squadra, il goniometro, il quadrante, il grafometro, il teodolito ec.

e che la retta di unione  $AP$  faccia con questa un angolo  $PAB$  uguale a  $60^\circ$  gradi. Facendo centro in  $A$  con un raggio qualunque, si descriva una circonferenza  $b'p'p''$ , di cui si prenderà un arco  $bp$  contenente  $60^\circ$  gradi, e quindi si conduca dal punto  $A$  pel punto  $p$  una retta  $AP$  lunga 9 metri; Ma essendo possibile prendere quattro archi  $pb, p'u, p''u, p'''b$ , insistenti sulla retta  $AB$ , si potranno condurre quattro rette  $AP, AP', AP'', AP'''$ , delle quali i punti estremi  $P, P', P'', P'''$  sodisfaranno ugualmente al problema; Dunque posta inoltre la condizione che il punto  $P$  debba trovarsi da una parte o dall'altra della retta  $AB$ , e sulla



Fig. 24.

sinistra o sulla destra del punto  $A$ , rimarrà determinata anco in questo caso la sua unica posizione.

55. Adesso conoscendo le distanze  $aA, bA, cA$ , ec. dei punti  $a, b, c, d, e$  di una curva  $abcde$  (fig. 24) da un punto  $A$ , e gli angoli  $aAB, bAB, cAB$  ec. che rispettivamente fanno

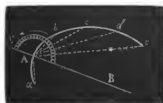


Fig. 25.

queste distanze colla retta  $CB$  giungeremo, col ripetere la suesposta soluzione per ciascun punto, a determinare la posizione della curva medesima. Se il punto  $A$  fosse situato sulla curva stessa (fig. 25), il modo di operare rimarrebbe il medesimo. L'esercizio poi che si acquista nella pratica dell'operare suggerisce delle

avvertenze per procedere con facilità e speditezza nella esecuzione di simili costruzioni.

56. Il *metodo misto* ora esposto richiede anch'esso per esser applicato l'uso di uno strumento proprio a dar la misura degli angoli (§ 53), ed a seconda de' casi può applicarsi alle piccole operazioni sulla carta come alle grandi operazioni sul terreno. In-

fatti se la linea *a d c b e* (fig. 26) rappresenta l'andamento di una strada, di un canale, di una muraglia ec., e da un punto fisso *A* si conduca una visuale ad un altro punto fisso *B* indicato, per esempio da un albero, dopo aver determinati gli angoli che le visuali condotte ai diversi punti *a, d, c, b, e*, fanno

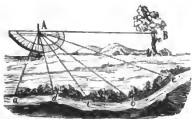


Fig. 26.

con la prima *AB*, misureremo la lunghezza di ciascuna visuale col compasso o con istromento analogo, se trattasi di rieavare o riprodurre in disegno quell'andamento; con la pertica, col duplometro, colla catena metrica ec. se trattasi di rilevarlo o tracciarlo sul terreno, e le loro estremità segneranno i punti dell'andamento cercato.

57. Mentre i metodi fin qui insegnati tutti trovano un uso nel disegno, rimangono affatto impropri ad operare in una superficie di terreno ove sia impedito di condurre visuali e camminare. Per esempio, volendo tracciare una via in riva del mare, a cui sovrasti una montagna coperta di folta boscaglia, sulle acque non possiamo segnare alcun sistema di linee, nè attraverso la boscaglia traguardare verun punto fisso. Parimente volendo tracciare l'andamento curvilineo di una galleria sotterranea, non potremo determinare che brevi linee quanto lo permetterà il successivo avanzarsi dei lavori di escavazione. Ciò nonostante il secondo quesito suggerisce il modo di modificare il *metodo misto* che ne dipende, da divenire utilissimo in questi casi dell'esercizio dell'arti. A tal effetto per determinare ogni nuovo punto di una curva, le operazioni che erano fra loro indipendenti, si faranno successivamente dipendere una dall'altra. Infatti siano *a, b, c, d, e* (fig. 27) i punti che rappresen-

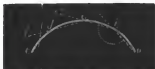


Fig. 27.

tano l'andamento di una curva da rilevarsi o da riportarsi sulla carta stessa, o sul terreno; considerati come fissi i primi due punti  $a, b$  e ritenuta la corda  $ab$  per base, la posizione del terzo punto  $c$  si determinerà riportando l'angolo  $ab c'$ , e prendendo la lunghezza  $bc$  sul lato  $b c'$ ; quindi si determinerà il quarto punto  $d$  ritenendo la corda  $bc$  per base, riportando l'angolo  $bc d'$ , e prendendo  $cd$  sul lato  $c d'$ ; dipoi colla base  $cd$  si troverà il punto  $e$ , e così di seguito si procederà per tutti i punti consecutivi della curva. Dunque conoscendo la lunghezza delle corde  $ab, bc, cd, de$  ec., e gli angoli  $abc, bcd, cde$  ec., si determinerà la curva seguendo un andamento poligonare, che tanto meno si allontanerà da quello della stessa curva quanto più vicini fra loro saranno i punti  $a, b, c, d, e$  cc. Si osservi che la triangolazione a base comune (§ 53) operata cogli altri metodi si può in qualche modo applicare in circostanze simili, prendendo nella costruzione dei triangoli successivamente per base le



Fig. 28.

corde  $ab, bc, cd$ , ec. (fig. 28) e per vertici  $c, d, e$  ec.

58. QUESITO TERZO. *Determinare la posizione di un punto P (fig. 29), dal quale le parallele PD, PE condotte rispettivamente alle rette  $C C', B B'$  fisse di posizione, e che si tagliano in un punto A, sieno uguali per esempio a 7 e 5 metri. Partendo dal punto A si prenda sulla retta  $B B'$  una lunghezza AD uguale a 5 metri, e sulla retta  $C C'$  una lunghezza AE uguale a 7 metri, quindi dal punto D si conduca una parallela a  $C C'$ , e dal punto E una parallela ad  $B B'$ : l'intersezione P di esse sarà il punto cercato; ma il punto D potendo prendersi oppostamente nel punto  $D'$  ed il punto E in  $E'$ , le parallele condotte rispettivamente dai quattro punti D,  $D', E, E'$ , si tagliano nei punti P,  $P', P'', P'''$  che ugualmente soddisfano*



Fig. 29.

una parallela a  $C C'$ , e dal punto E una parallela ad  $B B'$ : l'intersezione P di esse sarà il punto cercato; ma il punto D potendo prendersi oppostamente nel punto  $D'$  ed il punto E in  $E'$ , le parallele condotte rispettivamente dai quattro punti D,  $D', E, E'$ , si tagliano nei punti P,  $P', P'', P'''$  che ugualmente soddisfano

no al problema; dunque il punto  $P$  resta assolutamente determinato quando si sappia in quale dei quattro angoli formati dalle rette fisse deve trovarsi situato.

59. È manifesto che questa soluzione si riduce in somma alla costruzione di un parallelogrammo, ed in conseguenza per

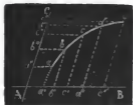


Fig. 30.

determinare i punti  $a, b, c, d, e$ , di una curva (fig. 30) è d'uopo di costruire una serie di altrettanti parallelogrammi  $A a' a a''$ ,  $A U' b U''$ ,  $A c' c c''$  ec., il che forma un processo facile quanto lungo e di grave imbarazzo nelle operazioni a grandi dimensioni. Ma siccome il principio da cui ci siamo partiti

facilita immensamente le considerazioni e le ricerche geometriche, e dà luogo ad un metodo usitatissimo nell'esercizio pratico delle arti, crediamo opportuno il fissarne bene le idee.

60. Siano  $DC, EB$  (fig. 31) due rette che comunque si

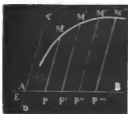


Fig. 31.

tagliano in un punto  $A$ , e da un punto  $M$  preso sopra una curva  $MM'M''M'''$ , si conduca la  $MP$  parallela a  $DC$ . La retta  $MP$  si chiama *ordinata* del punto  $M$ , ed il segmento  $AP$  *ascissa* del medesimo. La retta  $DC$  si dice *asse delle ordinate* e la retta  $EB$  *asse delle ascisse* o *direttrice* ed il punto d'intersezione

$A$  si dice *origine*. Conoscendo adunque le ordinate e le ascisse dei punti  $M, M', M'', M'''$  ec. di una curva, saremo in grado di costruire la curva stessa prendendo sopra  $AB$  i segmenti  $AP, AP', AP'', AP'''$  ec., e dai punti  $P, P', P'', P'''$  ec. elevando le  $PM, P'M', P''M'', P'''M'''$  ec. parallelamente ad  $AC$ , le di cui estremità  $M, M', M'', M'''$  ec. apparterranno alla curva. È da osservarsi affinché non nasca dubbio sulla vera posizione dei punti  $M, M', M'', M'''$  ec. che considerando le ascisse dall'origi-

ne A verso B e le ordinate da A verso C come positive, si ri-

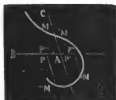


Fig. 32.

tterranno ambedue negative da A verso la parte opposta. Così saranno positive le ordinate  $MP$ ,  $M'P'$  (fig. 32) dei punti  $M$ ,  $M'$  e le ascisse  $AP$ ,  $A P''$  dei punti  $M$ ,  $M''$ , e negative le ordinate  $M''P''$ ,  $M'''P'''$  dei punti  $M''$ ,  $M'''$ , e le ascisse  $A P'$ ,  $A P''$  dei punti  $M'$ ,  $M''$ .

61. In generale gli assi si pongono ad angolo retto, ed allora si dicono *ortogonali*, e le ordinate si dicono *rettangole*. Con ciò la semplicità che acquista il *metodo delle ordinate*, a cui in queste lezioni spesse volte ricorreremo, diviene più preziosa per le speculazioni della Geometria analitica non meno che vantaggiosa agli usi della Geometria pratica.

## LEZIONE TERZA.

*Continuità delle Curve — Misura delle linee Curve —  
Misura delle superficie piane terminate da Curve.*

**Continuità delle Curve.** — 62. Dai diversi metodi esposti nella precedente lezione abbiamo imparato a determinare isolatamente un certo numero di punti di una curva; ma ci rimane a saperla tracciare in un modo *continuo*. Il grado di continuità di una curva è diverso secondo lo scopo cui deve servire, la maggiore o minore importanza delle operazioni che vi conducono ed il grado di esattezza richiesta. Una fila d'alberi piantati a più o meno grandi distanze fra loro, i pali verticali componenti una cancellata, le linee punteggiate dei disegni rappresentano per punti l'andamento di una curva con diverso grado di continuità, la quale sarà tanto maggiore quanto quelli sono più vicini fra loro.

63 Nel maggior numero dei casi non si raggiunge la voluta continuità di una curva col ravvicinare soltanto il più possibile i punti già determinati, ma fa d'uopo di unirli con linee da non lasciare la benchè minima interruzione. Ponno unirsi i punti con linee rette che sieno le corde di altrettanti archi consecutivi, e che formino un poligono  $a b c d$  ec. (*fig. 33*) da rappresentare la curva data; in tal caso si avrà continuità



Fig. 33.



nella successione dei punti ma non nelle loro direzioni, perchè ad ogni vertice  $a, b, c$  ec. del poligono succede un cangiamento di direzione. L'arte del Bottaio si contenta di una simile continuità nella confezione delle botti, dei tini, delle bigonce ec., le doghe dei quali sono i lati del poligono che ella sostituisce alla curva secondo la quale son foggiate quei continenti. Nella costruzione dei muri, degli argini, delle strade, dei canali ec., ed in generale nei lavori di grande estensione può impiegarsi un tal genere di continuità, la quale sarà pure maggiore quanto minori saranno i lati del poligono.

64. La continuità nelle successioni dei punti e nella loro direzione meglio si ottiene unendo i punti  $A, B, C, D, E$ , ec. (fig. 34)



Fig. 34.

con una serie di archi di cerchio  $AB, BC, CD$ , ec., che per esser descritti basta trovare il luogo dei rispettivi centri  $a, b, c, d$ , ec. Perciò conosciuta la direzione  $AN$  del raggio che passa pel primo punto  $A$  si conduca la perpendicolare  $1a$  sulla metà della corda  $AB$ , ed il punto  $a$  ove essa incontra la retta  $AN$  sarà il centro del primo arco  $AB$ .

Conducendo la retta  $Bb$  per i punti  $B$  ed  $a$  ed elevando sulla metà della corda  $BC$  la perpendicolare  $2b$ , il punto  $b$  di loro incontro sarà il centro del secondo arco  $BC$ . Condotta per  $C$  e  $b$  la retta  $Cc$ , il punto  $c$  ove essa incontra la perpendicolare  $3c$  elevata sulla metà di  $CD$  sarà il centro del terzo arco  $CD$ . E così procedendo per gli altri archi determineremo i centri  $a, b, c, d$ , ec. degli archi  $AB, BC, CD, DE$  ec. componenti la intera curva con andamento continuo. Le curve così composte e con tal metodo descritte si dicono *curve polacentriche*, delle quali l'arte del fabbricare specialmente fa uso frequente nel disegnare le centine per la costruzione degli archi e delle volte.

65. Quando i punti  $A, B, C, D$  ec. di una curva sieno tal-

mente vicini tra loro da confondere insieme gli archi circolari cogli archi curvilinei, i punti  $a, b, c, d$ , ec. saranno i centri di curvatura, e le rette  $aA, bB, cC, dD$  ec. saranno i raggi di curvatura (§ 21), ed allora la linea descritta essendo continua anco rapporto alla curvatura avremo raggiunto un maggior grado di continuità. Siccome un raggio  $eE$  di un arco qualunque  $EF$  uguaglia la somma del raggio  $dE$  dell'arco precedente  $DE$ , e della distanza  $de$  dei loro centri, se si tende sopra i centri di curvatura  $a, b, c, d$ , ec. fino in  $A$  (fig. 35) un filo inestendibile.



Fig. 35.

e tenendo il filo sempre teso senza che scorra lungo i punti medesimi, si faccia progredire il punto  $A$ , con questo si descriverà successivamente tutti gli archi di circolo, i quali formeranno una curva policentrica, che avrà approssimativamente la continuità della data curva  $AH$ . Questo metodo sarà tanto più prossimo a rigorosa esattezza quanto meno distanti tra loro saranno i centri di curvatura  $a, b, c, d$ , ec., e riuscirà perfettamente esatto se questi punti si succederanno senza intervallo da formare una seconda curva continua, della quale in seguito tratteremo con specialità, e vedremo quali rapporti essa abbia con la prima.

66. In pratica si usano diversi metodi meccanici per dare quel grado di continuità alle curve che si richiede dall'indole dei lavori I costruttori di navi, per esempio, segnano sopra una tavola piana i punti principali per cui deve passare la curva, di poi piantano dei chiodi  $p, p', p'', p'''$  ec. (fig. 36) al di quà e al di là di



Fig. 36.

quello che si richiede dall'indole dei lavori I costruttori di navi, per esempio, segnano sopra una tavola piana i punti principali per cui deve passare la curva, di poi piantano dei chiodi  $p, p', p'', p'''$  ec. (fig. 36) al di quà e al di là di

questi punti, ed a tale distanza che una riga  $XY$  sottile e flessibile possa esser posta fra i chiodi; allora con un lapis o simil cosa seguendo il lato della riga segnano una linea che avrà l'andamento indicato dai punti principali. Questo modo di tracciare le curve, che in molti casi può essere utile alle arti, richiede che la riga sia di grossezza uniforme e di materia omogenea, onde si pieghi convenientemente e la linea risulti incurvata per gradazioni insensibili con quel grado di continuità richiesto dall'uso cui è destinata.

67. I disegnatori procedono talvolta con un metodo analogo. Stabiliti sulla carta i varii punti pei quali deve passare la curva, piegano una sottil bacchetta di osso di balena o una lamina di metallo secondo l'andamento che presentano quei punti, e la ritengono in quella posizione con pesi di piombo fatti a tal uopo; ed in fine segnano lungo quella bacchetta la curva. Nel disegno si fa uso ancora di uno strumento dai francesi detto *pistolet* e che noi chiameremo italianamente *tiracurve*. Questo strumento consiste in una lastra sottile di legno o di metallo



Fig. 37.

(fig. 37) intagliata secondo diversi contorni combinati con curve varie e di varia curvatura. Per usarne si cerca che tre punti almeno coincidano con una qualche porzione del contorno dello stro-

mento. L'esercizio o l'abilità di un disegnatore ne insegna il maneggio ed ogni pratica avvertenza, affine di disegnare le curve con precisione e con la conveniente continuità.

68. Per rilevare o ricopiare una curva si può far uso di una lamina flessibile ma non elastica, la quale conservando la curvatura della linea su cui si sia applicata, servirà di riga per disegnarla sulla carta o sopra un piano qualunque. L'Architetto appunto per rilevare la curvatura delle modanature, delle mensole, delle volute, ec. vi stende una lamina

di piombo, A B (fig. 38) che dipoi applica sulla carta, e ne disegna il contorno che risulta uguale alla curva richiesta.



Fig. 38.

Alcuni stromenti sono stati immaginati per copiare le curve. Per esempio si abbia un regolo A B (fig. 39) nel quale possano scorrere perpendicolarmente varii, sottili ed uguali regoletti, ed esservi fissati a piacimento con una vite di pressione V. Ponendo a contatto di una curva X Y le estremità dei medesimi, le estremità opposte si disporranno secondo una

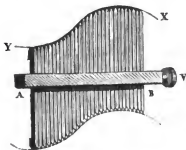


Fig. 39

linea uguale alla XY, di cui il regolo A B fa le veci di asse delle ascisse, ed i regoletti rappresentano le ordinate (§§ 60, 64). Allora reso rigido tutto il sistema si riporterà sulla carta e si segnerà una linea che passi per l'estremità dei regoletti, e che sarà la linea ricopiata. Quando

la curva ha una lunghezza maggiore dello strumento, si potrà descrivere per sezioni tenendo conto dell'angolo che faranno le direzioni delle lamine nella nuova e nella stazione precedente.<sup>1</sup>

**Misura delle linee curve.** — 69. Le linee rette si misurano col confronto di una retta presa per unità di misura diversamente convenuta in ciascun paese e suddivisa in parti.

<sup>1</sup> In molti casi il disegnatore per riprodurre la copia uguale di una curva fa uso del *pantografo*, stromento che si presta altresì alla riproduzione in diverse proporzioni. Essendo fondato sulla Teoria delle figure simili, non crediamo questo il luogo di ripetere ciò che abbiamo detto e descritto in proposito nelle nostre lezioni di Geometria elementare.

Nelle nostre lezioni di Geometria elementare ne esponemmo estesamente il principio ed il modo di applicarlo.<sup>1</sup>

70. Le linee curve si misurano trovando il rapporto che hanno con alcune linee rette con cui sono invariabilmente congiunte. In seguito vedremo che in tutte le curve si riscontra questo qualsiasi legame, e per ciascuna esiste un diverso rapporto, col quale determineremo la di lei misura. Noi ne avemmo un esempio nella misura del circolo, la quale si ottiene dal noto rapporto della circonferenza al diametro. In generale una curva  $A B C D$  ec. (fig. 34) (§ 64) si trova sempre congiunta coi raggi di curvatura  $A a, B b, C c, D d$ , ec., che noi insegnammo a determinare per tutte (§ 20): e siccome la Geometria ci insegna a trovare la lunghezza dei rispettivi archi osculatori  $A B, B C, C D, D E$ , ec. componenti la curva, la somma di questi archi darà la lunghezza della curva  $A B C D E$  ec. Questo metodo di misurare le linee curve è matematicamente rigoroso, ed è possibile la sua applicazione, ma non insistiamo a raccomandarne l'uso perchè non è di semplice e facile esecuzione, nè di pratica ed esatta riuscita. Sebbene le *ascisse*, le *ordinate*, i *raggi vettori* ec.<sup>2</sup> sieno pure e sempre in stretto rapporto con una curva qualunque, ci asteniamo dal parlarne per non oltrepassare i limiti che ci siamo imposti in questo libro.

71. Le linee curve si misurano rettificandole, cioè distendendole in una vera e propria linea retta, il che in pratica si ottiene facilmente stendendo su di esse un filo flessibile, la di cui lunghezza misurata darà quella della curva. Se la linea curva da misurarsi trovasi sul terreno, allora si divide in sezioni da potersi considerare come rette, e dalla somma di tutte queste rette misurate nei modi soliti otterremo la lunghezza totale

<sup>1</sup> *Lezioni di Geometria tecnologica* dette dall'autore nell'I. e R. Istituto Tecnico negli anni accademici 1849-50, 1851-52.

<sup>2</sup> Si dice *raggio vettore* ogni retta che da un punto determinato degli assi si conduce ad un punto qualunque della curva.

della curva proposta. È manifesto che avremo in tal modo misurato il perimetro di un poligono che rappresenta la curva, e la misura sarà tanto più prossima alla vera quanto minori saranno la curvatura della curva e i lati del poligono.<sup>1</sup>

72. La rettificazione delle linee curve e quindi la loro lunghezza si può ottenere anco meccanicamente. Se un cerchio  $O$  (fig. 40) si fa girare sopra una linea curva  $AB$  qualunque, in modo che ogni punto della



Fig. 40

sua circonferenza venga successivamente in contatto con la medesima senza strisciamento di sorta, si dice che la circonferenza si è sviluppata sopra la curva  $AB$ ; e quando il

primitivo punto di contatto  $a$  della circonferenza rotando sarà tornato a toccar la curva in un punto  $b$ , la porzione  $ab$  della curva  $AB$  sarà uguale alla intera circonferenza sviluppata. Ora

<sup>1</sup> Si chiami  $\lambda$  la lunghezza finita di una curva che ha per equazione  $y = \varphi(x)$  ove ad  $x = a$  ed  $x = b$  corrispondono le ordinate estreme. La corda di ogni arco della curva, ossia ciascun lato del poligono, è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cui i lati sono le differenze delle ascisse e delle ordinate estreme di questo arco: ma l'arco e la corda impiccolendo tendono ad uguagliarsi ed hanno lo stesso limite

$$d\lambda = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Dunque la somma, dei lati del poligono, ossia la lunghezza lineare della curva sarà

$$\lambda = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

ed infine poichè  $dy = \varphi'(x) dx$ , sostituendo e riducendo avremo

$$\lambda = \int_a^b dx \sqrt{1 + \varphi'(x)^2}$$

formula che essendo in funzione unicamente della  $x$ , dà in pratica la rettificazione di una curva riferita a due assi ortogonali coi soli aumenti della  $x$ .

facendo sviluppare nel modo istesso il medesimo circolo sopra una linea retta  $A'B'$  (fig. 41), la sua porzione  $a' b'$  corrispondente ad una intera rivoluzione equivale alla circonferenza sviluppata: ma la porzione di curva  $ab$  (fig. 40) è pure lo sviluppo della medesima circon-



Fig. 41.

ferenza: dunque la retta  $a' b'$  è uguale in lunghezza alla curva  $ab$ , ed è ciò che appunto si intende per rettificazione di una curva.

73. Sopra un tal principio è fondata la costruzione dell'*Oplisometro di Elliot* destinato a rettificare una curva qualunque, con esattezza sufficiente agli usi pratici del disegnare. Questo strumento consiste

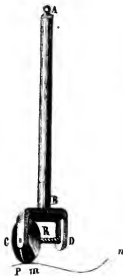


Fig. 42.

in una forca  $CBD$  (fig. 42) di metallo sostenuta da un manico  $AB$ , nella quale è fissata una vite  $CD$ , che fa le veci di asse ad una rota pazza  $R$ . La rotella  $R$ , essendo in sostanza la madre vite mobile, è costretta a trasportarsi verso  $C$  o verso  $D$  secondo che gira in un senso o nel senso opposto. Uno dei bracci  $C$  termina in una punta  $P$ , che viene quasi in contatto della circonferenza della rotella quando questa si trova a contrasto del braccio stesso. Per adoperar lo strumento si pone la rotella a contrasto del braccio  $C$ , e si applica la circonferenza sulla curva  $mn$ , procurando che la punta  $P$  coincida con una estremità  $m$ , quindi si fa girare lun-

go la curva la rotella, esercitando sempre una lieve pressione per impedire lo strisciamento, e sviluppando così la sua circonferenza quante volte occorra fino a che la punta  $P$  giunga a corrispondere coll'altra estremità  $n$  della curva. Allora la rotella

senza alterarne la posizione si distacca dalla curva e si applica sovra un piano, facendola girare in senso inverso lungo una riga diritta fin che non torni a contrasto col braccio C. La retta così sviluppata e determinata dalle posizioni estreme della punta P sarà uguale in lunghezza alla curva *m n*.

74. L'*Opisometro di Elliot* per l'indole della sua costruzione richiede una scrupolosa attenzione e delle avvertenze nell'adoprarlo, esige due operazioni da repetersi ove le lunghezze misurabili superino la somma degli sviluppi che può fare la cir-

conferenza della rotella proporzionatamente al numero dei pani della vite, e dipoi occorre una terza operazione per misurare la curva rettificata, per cui tutto ciò contribuisce a dare dei risultati erronei, o per lo meno non esatti rigorosamente. Io ho immaginato uno strumento che va esente da questi difetti, e con una sola operazione dà direttamente la misura in cifre di una linea curva qualunque.

75. Questo strumento, che per distinguerlo dal precedente chiameremo *Opisometro contatore*, si compone pure di una forca C B D sostenuta da un manico A B (fig. 43) in cui gira col suo asse la rotella R. Uno dei bracci D termina pure nella punta P (fig. 42), la quale si mantiene costantemente a contatto della circonferenza della rotella R concentrica ad un contatore C, in cui termina l'altro braccio. Il diametro della rotella è tale che la circonferenza svilup-



Fig. 43.

pata resulta di un decimetro di lunghezza, ed in generale di una unità di misura. Il contatore è diviso in 40 parti, ciascuna delle quali contiene 10 divisioni, e sull'estremità dell'asse E F della



rotella (fig. 44) sono disposte due lancette *L*, *l*; delle quali la più

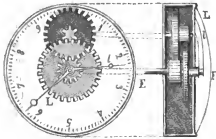


Fig. 44.

grande *L* gira insieme colla rotella, e la più piccola *l* gira in modo, per la combinazione di un rotismo di *minute-ria* da orologio, da fare un giro mentre la prima ne fa 10. Se dunque ad ogni giro della rotella la lancetta grande *L* percorre

tutta la circonferenza del disco, e la piccola *l* soltanto la decima parte, questa ci indicherà il numero dei giri della rotella, e quella le frazioni decimali di giro. Or bene: fatte coincidere ambedue le lancette collo zero delle divisioni del disco, si pone la circonferenza della rotella *R* a contatto della curva da misurarsi, osservando che la punta *P* coincida con una estremità, e dipoi si sviluppa la rotella lungo la curva fin che la punta *P* giunge a coincidere coll'altra estremità. Si distacca allora lo stromento, e si guarda ove si sono fermate le lancette; se per esempio la lancetta piccola *l* si è fermata tra l'ottava e la nona divisione, e la lancetta grande *L* alla 65<sup>a</sup> dell'intero disco, vuol dire che la rotella ha fatti otto giri e 65 centesimi di giro; ma la circonferenza della rotella è uguale ad un decimetro; dunque la curva misurata equivale in lunghezza a 8 decimetri, e 65 centesimi di decimetro, cioè a 865 millimetri.

76. È chiaro che con l'*opisometro contatore* possiamo misurare una linea qualunque disegnata sulla carta con una facilità da divenir maggiore colla pratica, e con una esattezza se non matematicamente, almeno tecnologicamente rigorosa. Gli stromenti descritti essendo destinati alla misura di dimensioni limitate all'arte del disegnare, anco per la loro delicatezza non

potrebbero adoprarsi alla misura delle linee in natura: ma è facile il costruirne dei simili sui medesimi principii, e grandi quanto lo richiede l'uso a cui devono servire. Con questi allora si potrà misurare meccanicamente la circonferenza di una colonna, e il perimetro di un albero, e la lunghezza di una trave, di un muro, di un argine, di una strada,<sup>1</sup> e le linee di curvatura di un arco, di una volta, di una cupola, di una botte, di una caldaia, di una nave, ec., e render spedita ad ogni sorta di arte e mestiere la misurazione delle dimensioni, liberandola dalle operazioni della geometria e del calcolo, poco familiari al maggior numero degli artieri.

**Misura delle superficie plane.** — 77. Le superficie si misurano con le regole della geometria elementare, e si rappresentano con un quadrato equivalente, o più generalmente si esprimono pel numero di volte che contengono un quadrato preso per unità di misura. Ma accade sovente che esse sono terminate da linee e contorni che non sono sottoposti ad alcuna legge geometrica conosciuta, ed allora è necessario ricorrere a dei metodi di quadratura approssimativi o a dei mezzi meccanici. Per calcolare approssimativamente la superficie piana limitata da un contorno curvilineo qualunque, o composto di curve e di rette, si può operare nel seguente modo.

78. Abbiasi la superficie piana  $a a' c' f' f'$  (fig. 45) terminata dalla curva  $a' b' c' d' e' f'$ , dalla retta AB presa per asse delle



Fig. 45.

ascisse, e dalle due ordinate estreme  $aa', ff'$  rettangole. Se si divide la distanza  $af$  in parti uguali, per esempio in 5, e dai punti di divisione  $b, c, d, e$  si conducono alla curva le nuove ordinate  $bb', cc', dd', ee'$ ,

<sup>1</sup> Gli odometri o perambulatori che portati in dosso da una persona, contano i passi che essa va facendo, e quegli apparati che applicati alla rota di una vettura, misurano il cammino percorso, sono strumenti di simil genere.

alla superficie  $a a' c' f' f$  può per approssimazione sostituirsi la somma dei trapezi rettilinei  $aa'U'b$ ,  $bU'c'$ ,  $cc'd'd$ ,  $dd'e'e$ ,  $ee'f'f$ ; ma l'area di ogni trapezio equivale alla somma delle basi parallele moltiplicata per la metà dell'altezza comune; dunque chiamando  $S$  la misura della superficie  $a a' c' f' f$  avremo

$$S = \frac{1}{2} ab (aa' + bb') + \frac{1}{2} bc (bb' + cc') + \\ + \frac{1}{2} cd (cc' + dd') + \frac{1}{2} de (dd' + ee') + \frac{1}{2} ef (ee' + ff')$$

che si riduce ad

$$S = \frac{1}{2} ab (aa' + ff') + 2 (bb' + cc' + dd' + ee')$$

cioè *la metà dell'intervallo costante di due ordinate consecutive moltiplicato per la somma delle ordinate estreme, più il doppio della somma delle rimanenti.*

79. Questo è il metodo ordinarimente seguito; ma siccome si riduce a sostituire alla curva un poligono inscritto  $a'U'c'd'e'f'$  è chiaro che la formula darà dei risultati troppo grandi ove la curva  $a'U'c'd'e'f'$  rivolga la sua convessità (*fig. 46*) alla linea  $AB$ , ed al contrario gli darà troppo piccoli ove rivolga (*fig. 45*) la sua concavità, e vi sarà un certo compenso quando la curva  $a'U'c'd'e'f'$  (*fig. 47*) sia con qualche regolarità alternativamente concava e convessa. L'approssimazione in generale sarà sempre inversamente



Fig. 46



Fig. 47.

proporzionale alla curvatura della curva  $a'U'c'd'e'f'$ , e per ottenerla maggiore è d'uopo aumentare i punti di divisione della distanza  $af$  (*fig. 45, 46, 47*), e così diminuire i lati  $a'U'$ ,  $U'c'$ ,  $c'd'$ ,  $d'e'$ ,  $e'f'$  del poligono  $a' b' c' d' e' f'$ . Ma senza essere obbligati di moltiplicare i punti di divisione, si ottiene un valor della superficie  $S$  molto più approssimato col metodo seguente.

80. La distanza  $ag$  (fig. 48) delle ordinate estreme si divida in un numero *pari* di parti uguali, per esempio in 6, e dai punti di divisione  $b, c, d, e, f$  si conducano le ordinate  $bb_1, cc_1, dd_1, ee_1$  alla curva, le quali risultano in numero *dispari*, cioè sette, ed i punti della curva vengano indicati da lettere numerate progressivamente per distinguere il posto *pari* o *dispari* che occupa ciascuno. Ciò posto, la superficie  $S$  terminata dalla curva  $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1 g_1$  ha per valore



Fig. 48.

$$S = \frac{1}{3} ab [aa_1 + gg_1 + 2(cc_1 + ee_1) + 4(bb_1 + dd_1 + ff_1)].$$

vale a dire il terzo del prodotto che si ottiene moltiplicando l'intervallo costante di due ordinate consecutive per la somma delle ordinate estreme, accresciuta del doppio di quella delle ordinate di posto *dispari* e del quadruplo di quella delle ordinate di posto *pari*.

Tale è il metodo conosciuto col nome del geometra Simpson al quale è dovuto.

81. *Dimostrazione della formola di Simpson.* — Considerando un intervallo compreso fra due ordinate *dispari* consecutive  $cc_1, ee_1$  qualunque (fig. 49) si divida  $ce$  in tre parti uguali  $cm = mn = ne$ , e dai punti  $m, n$  si conducano le nuove ordinate  $mm', nn'$ ; si avrà un valore più approssimato dell'area mistilinea  $cc_1 d_1 e_1$  e prendendo i tre trapezi rettilinei  $cc_1 m' m, mm' n' n, nn' e_1 e$ , invece dei due trapezi  $cc_1 d_1 d, dd_1 e_1 e$ . La superficie dei tre trapezi pel numero (78) sarà espressa da



Fig. 49.

$$\frac{1}{2} cm (cc_1 + ee_1 + 3(mm' + nn'))$$

che per essere  $cm = mn = ne = \frac{2}{3} cd = \frac{2}{3} ab$

diviene (1)  $\frac{1}{3} ab (cc_1 + ee_1 + 2(mm' + nn'))$

Ora la corda  $m'n'$  incontrando l'ordinata  $dd_1$  in un punto  $o$  sappiamo che

$$do = \frac{1}{2} (mm' + nn') \quad \text{ossia} \quad 2(mm' + nn') = 4 do.$$

Dunque sostituendo nella (1) si avrà per la superficie totale dei tre trapezi

$$(2) \quad \frac{1}{3} ab(cc_3 + ee_3 + 4 do).$$

Questa superficie rimane sempre più piccola della superficie curvilinea da misurarsi, ma se alla  $do$  si sostituisce l'intera ordinata  $dd_1$ , si otterrà una compensazione approssimativa, e quindi un valore più approssimato dell'area curvilinea  $cc_3d_1e_3$  cambiando l'espressione (2) nella

$$(3) \quad \frac{1}{3} ab(cc_3 + ee_3 + 4 dd_1)$$

1 Siccome  $\frac{1}{3} ab(cc_3 + ee_3 + 4 dd_1) = \frac{1}{3} ab(cc_3 + ee_3 + 4 do) + \frac{4}{3} ab \cdot od_1$  è chiaro che sostituendo  $dd_1$  a  $do$  abbiamo aumentato la espressione (2) della quantità  $\frac{4}{3} ab \cdot od_1$ , ma il triangolo  $m'd_1n'$  formato dalle corde  $m'd_1$ ,  $n'd_1$  si compone dei due triangoli  $m'od_1$ ,  $n'od_1$ , ed essendo

$$md = dn = \frac{1}{3} ab$$

ha quindi per misura

$$\frac{1}{2} od_1 \cdot md + \frac{1}{2} od_1 \cdot dn = \frac{1}{3} ab \cdot od_1.$$

Dunque abbiamo aumentato la superficie totale dei tre trapezi quattro volte quella del triangolo  $m'd_1n'$ , invece della somma  $s$  dei tre segmenti curvilinei. Perciò se  $s = \frac{4}{3} ab \cdot od_1$  la compensazione sarà esatta ed il

metodo rigoroso, diversamente l'errore sarà la differenza  $\pm (s - \frac{4}{3} ab \cdot od_1)$

la quale non sarà generalmente che una piccola funzione di quelle piccole quantità. In conseguenza per calcolare con esattezza una superficie piana curvilinea, oltre a moltiplicare le ordinate ed a scegliere l'asse delle ascisse in modo che le ordinate non incontrino troppo obliquamente la curva, bisognerà evitare che i trapezi rettilinei differiscano molto dai curvilinei.

Parimente per ogni coppia di trapezi si avranno i valori superficiali (fig. 48).

$$(4) \frac{1}{3} ab (aa_1 + cc_1 + \frac{1}{2} bb_1).$$

$$(5) \frac{1}{3} ab (ee_1 + gg_1 + \frac{1}{2} ff_1)$$

e così di seguito se più fossero le divisioni della retta  $ag$ . Dunque sommando i valori (3), (4) e (5), e chiamando  $S$  la superficie curvilinea avremo

$$S = \frac{1}{3} ab (aa_1 + cc_1 + \frac{1}{2} bb_1 + cc_1 + ee_1 + \frac{1}{2} dd_1 + ee_1 + gg_1 + \frac{1}{2} ff_1)$$

ossia

$$S = \frac{1}{3} ab (aa_1 + gg_1 + 2(cc_1 + ee_1) + \frac{1}{2} (bb_1 + dd_1 + ff_1))$$

82. La quadratura della superficie per esser determinata rigorosamente dai metodi di calcolo esposti richiede molta esattezza nelle costruzioni grafiche delle ordinate, e spesse volte questa operazione ausiliaria arreca in un disegno confusione di linee, ed imbarazzo. In pratica per esimersi da queste operazioni si può aver ricorso ad una lastra trasparente A B C D

<sup>1</sup> Essendo  $2n$  il numero delle divisioni della distanza  $ag$ ,  $2n + 1$  sarà il numero delle ordinate. E chiamando con  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \dots, \omega_{2n+1}$  le ordinate successive, di cui l'indice numerico indica il posto che occupano e con  $\delta$  l'intervallo loro, avremo la formula di Simpson espressa generalmente con

$$S = \frac{1}{3} \delta (\omega_1 + \omega_{2n+1} + 2 \sum_2^{2n-1} \omega + 4 \sum_1^{2n} \omega)$$

ove  $\sum_1^{2n-1} \omega$  rappresenta la somma delle ordinate dispari estesa dalla terza alla  $2n - 1^{\text{esima}}$  non comprese le estreme  $\omega_1$  e  $\omega_{2n+1}$  e  $\sum_2^{2n} \omega$  la somma di tutte le ordinate pari estesa dalla seconda alla  $2n^{\text{esima}}$ .

(fig. 50) su cui siano state precedentemente segnate ad egual distanza delle linee perpendicolari ad una linea principale CD, e tante linee a questa parallele che dividano le prime in parti uguali alla medesima distanza, formando così tanti quadrati di unità di misura superficiale: allora è chiaro che applicata la lastra così reticolata sopra la superficie OMND da misurarsi, in modo che l'asse delle ascisse X Y di questa coincida colla



Fig. 50.

linea principale C D di quella, la lunghezza di tutte le ordinate da introdursi come elemento di calcolo nei metodi esposti (§§ 78, 80) verrà determinata dalle linee orizzontali della lastra, la quale vien detta *lastra di calcolo*.

83. In qualche caso speciale, ove le circostanze lo permettano, si può adoprare un metodo assai diverso. Sappiamo che i volumi di due prismi della medesima altezza son proporzionali alle loro basi qualunque esse siano; ma se i prismi sono formati di una materia di densità uguale, sappiamo che i volumi sono proporzionali ai loro pesi; dunque le basi di due prismi di altezza e di densità uguali sono proporzionali ai loro pesi, cioè chiamando B e b le basi, e P e p rispettivamente i loro pesi, si avrà la proporzione

$$B : b :: P : p.$$

Inconsequenza volendo riquadrare, per esempio, la superficie *abcd*

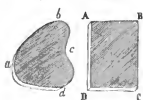


Fig. 51.

essa si disegna sopra un foglio di carta, sopra una lastra di lamiera, di latta, di piombo, ec., che sia di uniforme grossezza, e sulla medesima materia si disegna pure un rettangolo A B C D di nota superficie; è chiaro che intagliando quelle due figure otterremo di fatto due prismi della altezza uguale alla

superficie  $abcd$ ,  $ABCD$ , e finalmente pesando le due figure, coi loro pesi  $p$  e  $P$  si stabilirà la proporzione

$$abcd : ABCD :: p : P$$

ove essendo cogniti i tre termini  $ABCD$ ,  $p$ , e  $P$  ne ricaveremo il valore del quarto  $abcd = \frac{ABCD \times p}{P}$  che è appunto quello della superficie richiesta.

---



## LEZIONE QUARTA.

*Planimetro. — Misura delle superficie curve. — Misura dei solidi terminati da superficie curve.*

**Planimetro.** — 84. L'area delle superficie piane da qualunque contorno sieno terminate, si può praticamente misurare con mezzi più spediti e più sicuri di quelli esposti nella precedente lezione, senza le noie del calcolo e senza far uso del compasso e delle scale, impiegando una macchina, che nell'ufficio di misurare le superficie piane dicesi *planimetro*. L'idea prima di un tale stromento è dovuta al nostro professor Tito Gonnella, al quale gli sforzi altrui non ponno ormai più contrastare il merito della invenzione.<sup>1</sup> Scbbene non sia nostro scopo di trattenerci a parlare di macchine, e l'indole di questo libro non permetta di

<sup>1</sup> Il planimetro costruito da Ernst, e conosciuto dal suo nome, del quale si attribuisce l'invenzione a certo Oppikofer ingegnere a Berna, fu l'oggetto di un rapporto favorevole del signor Puissant all'Istituto di Francia nella seduta del 2 giugno 1834, ma l'antiorità dell'invenzione del professor Gonnella fu fissata fino dalla fine del 1824, in cui i professori toscani Giorgi, Inghirami, Doveri, Foggi, Frullani, Gerbi, Nesti, Pacchiani, Paoli, Passerini, Pieraccioli, Pierattini, ed i membri dell'Istituto di Francia conte Fossombroni e Libri esaminarono il primo modello; fu pubblicata nell'*Antologia* nel 1825; è stata riconosciuta in occasione della terza riunione degli Scienziati Italiani (vedi gli *Atti* di questa riunione) e finalmente venne confermata alla grande esposizione di Londra (vedi *Exhibition of the Works of Industry of all Nations...* London, 1852); perciò crediamo rivendicata questa invenzione fra le tante che i gelosi delle glorie italiane tentarono di rapire ai concittadini del Galileo.

sviluppare estesamente la teoria matematica di questo notevole strumento, di farne una completa descrizione, e di rilevarne le singole proprietà, per compiere ciò che abbiamo esposto sulle quadrature, e col diffonderne la conoscenza arrecare utilità anco ai meno istruiti nelle matematiche, ai quali importi di conseguire praticamente e presto maggiore esattezza nell'operare, tenteremo di dare un cenno del principio geometrico e delle principali parti che costituiscono il planimetro del professor Gonnella.

85. *Planimetro del Professor Gonnella.* — Abbiasi una superficie  $AbU'U''c''a'''$  (fig. 52) composta di tre rettangoli di basi uguali  $Aa' = a'a'' = a''a'''$  riferiti agli assi ortogonali  $AX, AY$ , ed un rettangolo  $QSVT$  qualunque, di base  $QS$  determinata e costante. Se sopra il lato  $QT$  si prendono dei segmenti contigui  $Qn, nn', n'n''$ , in modo che si verifichino le seguenti proporzioni



Fig. 52.

$$(1) \begin{cases} Qn : Ab :: Aa' : QS \\ nn' : a'u' :: a'a'' : QS \\ n'n'' : a''u'' :: a''a''' : QS \end{cases}$$

primieramente ne risulta che i rapporti

$$\frac{Qn}{Ab}, \frac{nn'}{a'u'}, \frac{n'n''}{a''u''}$$

sono uguali e costanti; cioè che i segmenti  $Qn, nn', n'n''$  sono proporzionali alle ordinate o altezze  $Ab, a'u', a''u''$ . In secondo luogo dalle proporzioni (1) si rileva che

$$\begin{aligned} Qn \times QS &= Ab \times Aa' \\ nn' \times QS &= a'u' \times a'a'' \\ n'n'' \times QS &= a''u'' \times a''a''' \end{aligned}$$

le quali uguaglianze sommate insieme daranno

$$(Qn + nn' + n'n'') QS = Ab \times Aa' + a'v' \times a'a'' + a''v'' \times a''a''';$$

Ma la somma  $Qn + nn' + n'n''$  dei segmenti equivale all'intera  $Qn''$ ; Dunque

$$Qn'' \times QS = Ab \times Aa' + a'v' \times a'a'' + a''v'' \times a''a''';$$

cioè la superficie dell'intero rettangolo  $QSo'n''$  equivale alla somma dei tre rettangoli  $Abca'$ ,  $a'v'ca''$ ,  $a''v''ca'''$ , ossia alla superficie  $Abv'v''c'a'''$ , e ne darà in conseguenza la quadratura. È chiaro che qualunque sia il numero dei rettangoli, purchè sieno costantemente uguali le porzioni in cui è diviso l'asse delle  $x$ , la loro somma, ossia la superficie da riquadrare, sarà sempre uguale al rettangolo formato da un lato costante  $QS$  e da un lato diviso in parti proporzionali alle altezze dei rettangoli.

86. Ora è facile immaginarsi due punte  $P$  e  $Q$  di una macchina, di cui per ora si faccia astrazione dall'organismo, tali che mentre l'una  $P$  percorre il perimetro della superficie  $Abv'v''c'a'''$ , l'altra  $Q$  descriva il lato  $QT$  di un rettangolo equivalente  $QSVT$ , la cui base si sia presa determinata e costante. Ma per fissare le idee si supponga che la punta  $Q$  descriva il lato  $Qn''$  con aumenti di velocità proporzionali alle ordinate  $Ab$ ,  $a'v'$ ,  $a''v''$ , mentre la punta  $P$  percorre rispettivamente le basi superiori  $bc$ ,  $v'c'$ ,  $v''c''$  e stia immobile quando  $P$  percorra le ordinate  $Ab$ ,  $a'v'$ ,  $a''v''$  e gli assi delle  $x$  e delle  $y$ . Però se il movimento della punta  $P$  che percorre la ordinata  $Ab$  e gli aumenti  $v'c'$ ,  $v''c''$  non turba la immobilità della punta  $Q$ , non deve esser inutile pell'organismo che lega le due punte, il quale si deve disporre in modo da ottenere gli aumenti nella velocità di  $Q$  quando  $P$  percorrerà gli aumenti  $bc$ ,  $v'c'$ ,  $v''c''$ , delle  $x$ . Or bene, ritenuto il principio da prima stabilito (§ 85) ed ammesse queste condizioni nei movimenti delle punte  $P$  e  $Q$ , la punta  $P$  col solo percorrere gli aumenti  $bc$ ,  $v'c'$ ,  $v''c''$ , indurrà la punta  $Q$  ad operare la quadratura della superficie richiesta  $Abv'v''c'a'''$ .

Finalmente si osservi che le condizioni a cui deve soddisfare il meccanismo che collega i movimenti delle punte P e Q sono affatto indipendenti dalla grandezza delle basi  $Aa'$ ,  $a'a''$ ,  $a''a'''$ , ec. ossia degli aumenti delle  $x$ , perciò sussisteranno sempre qualunque sieno questi aumenti, anco minori di ogni piccola quantità assegnabile; ma allora le rigorose teorie dell'analisi insegnano che la quadratura di tutti quei rettangoli si riduce a quella del segmento  $aMNa'$  limitato (fig. 53) da una curva MN;

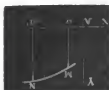


Fig. 53.

dundue se la punta P percorre la curva MN la punta Q segnerà la quadratura della superficie  $aMNa'$  compresa fra la curva MN, la porzione  $aa'$  dell'asse delle  $x$  e le ordinate  $aM, a'N$ .<sup>1</sup> Inoltre la punta Q segnerà pure la quadratura di una curva chiusa  $MRNT$  (fig. 54); imperocchè se la punta P percorre la curva  $MRN$  da M verso N, la punta Q segna la quadratura della superficie  $aMRNa'$ : ma la punta P venendo pel suo moto continuo a percorrere la curva  $NTM$  in senso contrario, la punta Q acquista pure, come vedremo, un moto contrario, e segna la quadratura dell'area  $aMTNa'$ ; dunque la punta Q segnando la differenza degli spazi percorsi da essa indica la differenza



Fig. 54.

<sup>1</sup> La operazione della punta Q coincide perfettamente coi risultati del Calcolo integrale, ed ambedue dipendono dalle stesse considerazioni. Infatti ciascun rettangolo essendo espresso dal prodotto dell'ordinata per l'aumento costante della  $x$ , questo impiccolendo ha per limite  $dx$ , e se le ordinate estreme della curva MN corrispondono ad  $x = a$  ed  $x = b$  la superficie  $aMNa'$  sarà espressa dall'integrale definito

$$\int_a^b y dx$$

ove, sostituito il valor di  $y$  dato dall'equazione della curva  $y = \varphi(x)$ ,

delle due quadrature, cioè l'area curvilinea  $M R N T$ .

87. Ciò premesso, il Planimetro del Gonnella consiste principalmente in un regolo  $YY'$  scorrevole sopra un piano  $MN$  (fig. 55 e 56) per mezzo di pulegge  $p$  nella direzione  $YY'$ , ed

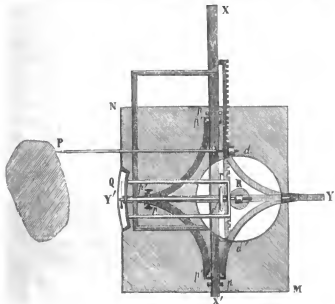


Fig. 55.

in un secondo regolo  $XX'$  scorrevole sul primo per mezzo delle pulegge  $p'$  nella direzione  $XX'$  perpendicolare ad  $YY'$ . Al re-

avremo la superficie

$$a M N a' = \int_a^b \varphi(x) dx;$$

formula in funzione unicamente della  $x$ , che dà la quadratura della superficie  $aMNa'$ , come appunto opera la punta  $Q$ .

<sup>1</sup> Il professor Gonnella ha sviluppati tutti questi principii, ed ha mostrate le diverse soluzioni del problema a cui danno luogo le condizioni dei moti relativi delle punte  $P$  e  $Q$ , e che possono servire alla costruzione di altrettanti meccanismi che congiungono le punte medesime. (Vedi T. GONNELLA, *Opuscoli matematici*, Firenze, 1841.)

golo  $XX'$  è fissata una verga  $P'P$  che termina nella punta  $P$ , e sul regolo  $YY'$  si eleva verticalmente un'asse  $ad'$  girevole, che in basso porta una rota  $R$  ed in alto orizzontalmente un disco circolare  $dd'$ .<sup>1</sup> Il regolo  $XX'$  è dentato ed incastrando coi denti della rota  $R$  gli comunica ogni suo moto. Sul disco  $dd'$  appoggia una rotella  $r'$  il di cui asse mette in movimento la lancetta  $Q$  di un contatore sostenuto da due colonne  $cc'$  indipendentemente dai movimenti dei due regoli. Da questa disposizione risulta che quando la punta  $P$  si muove nel senso  $YY'$  trascina seco tutto

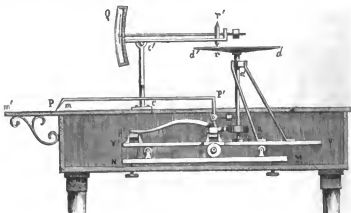


Fig. 56.

l'apparecchio, meno il contatore, e non induce alcun movimento nella punta  $Q$ , ma avvicina o allontana il centro del disco  $dd'$  dalla rotella  $r'$  di distanze, che sono proporzionali alle ordinate percorse dalla punta  $P$ . Quando poi la punta  $P$  si muove nel senso  $XX'$

<sup>1</sup> Generalmente in tali macchine si può impiegare un cono a base circolare convenientemente disposto, come è stato praticato nel Planimetro costruito da Ernst; ma il professor Gonnella ha dimostrato che l'angolo al vertice del cono che meglio soddisfa è di  $180^\circ$ , ciò che cambia il cono nel disco; e indica inoltre che si può impiegare una iperboloida equilatera, che pure soddisfa alle condizioni dei moti delle punte  $P$  e  $Q$ .

percorrendo gli aumenti delle  $x$  il regolo  $XX'$  comunica il moto di rotazione alla rota  $R$ , ossia al disco  $dd'$ , e questo alla rotella  $rr'$  e quindi alla punta  $Q$ . Ora la punta  $Q$  percorre spazi proporzionali alle distanze della rotella  $r r'$  al centro del disco  $dd'$ , cioè alle ordinate percorse dalla punta  $P$ ; ma la punta  $P$  potendo obbedire contemporaneamente ai movimenti dei due regoli  $XX'$ ,  $YY'$  è capace di moversi in qualunque direzione, e percorrere il perimetro di qualunque figura posta sul piano  $mm'$ ; Dunque la punta  $Q$  della lancetta del contatore indica a sua volta la quadratura della superficie della medesima collo stesso rigore dei principi esposti (§§ 85, 86).<sup>1</sup>

**Misura delle superficie curve.** — 88. Le superficie curve generate sotto determinate condizioni da una curva cognita si misurano, come vedremo, col mezzo della proprietà di cui gode quella generatrice in rapporto a queste condizioni. Ma in generale le superficie curve irregolari, nella di cui generazione non si riscontra legge di sorta, non si prestano ad esser misurate con esattezza, e solo lo possono essere per approssimazione. Se le superficie sono esattamente sviluppabili (§ 14) allora si potrà misurare la superficie sviluppata con quello fra i metodi indicati (§§ 78, 80, 82, 83, 84), che meglio converrà al caso; quando poi non sono sviluppabili, allo sviluppo approssimativo (§ 14) si applicheranno pure i medesimi metodi, ma in questo procedere non è mai abbastanza raccomandabile l'esattezza e la diligenza per rendere trascurabile l'errore inerente all'indole delle due operazioni.

<sup>1</sup> Nei citati opuscoli matematici si trova dettagliatamente descritta questa macchina, che noi abbiamo unicamente accennata. La prima macchina fu costruita dal Gonnella nel 1824, come abbiám detto (§ 84, nota 4), ed una se ne vede nel gabinetto di S. A. I. e R. il Granduca di Toscana, da esso fatta costruire ed adoprata per sua volontà sovrana nella misurazione delle Mappe per la formazione del catasto dell'Isola dell'Elba. Questa macchina fu esibita dall'autore all'esposizione industriale toscana del 1851, e dipoi riportò alla esposizione universale di Londra in premio la medaglia di prima classe (*Council Medal*).

**Misura dei solidi terminati da superficie curve. —**

89. La cubatura dei solidi terminati da superficie curve, regolari o irregolari di ignota legge, in generale si ottiene con metodi più o meno rigorosi, e quindi riesce più o meno approssimativa. A questa ricerca si può procedere in una maniera analoga a quella tenuta per le superficie nello stabilire la formula di *Simpson* (§ 80). A tale effetto si facciano nel solido da misurarsi tante sezioni parallele e ad egual distanza fra loro, che siano in numero dispari, e perciò resulti pari il numero degli intervalli. Operata la quadratura parziale di ciascuna sezione, si riportino sopra una linea presa per asse delle ascisse quegli intervalli uguali, ed in ciascun punto di divisione si elevi una perpendicolare o ordinata, la quale, stabilita dietro una scala convenuta, stia a rappresentare la sezione corrispondente. Per le estremità di tutte queste ordinate si faccia passare una curva, e la quadratura dell'area compresa fra la curva, le ordinate estreme e l'asse delle ascisse calcolata con la formula di *Simpson*, sarà la cubatura del volume proposto. <sup>1</sup>

90. Nell'architettura navale questo metodo può prestarsi convenientemente alla misura del volume di una parte di una nave, e l'arte dell'ingegnere può valersene per la cubatura degli *sterri* e dei *rinterri* irregolari. In questi ultimi lavori alcuni sogliono far uso del metodo pratico detto *delle dimensioni ragguagliate*; altri applicano quello detto *delle sezioni ragguagliate*: ma questi metodi conducono a dei resultati talvolta maggiori troppo del vero, tal altra troppo piccoli, erronei sempre. Per ciò importando assai di proscrivere assolutamente codesti metodi empirici da una sana pratica, crediamo far cosa utile ai principianti il non parlarne.

91. Fra i metodi rigorosi da adoprarsi in simili ricerche praticamente riesce comodissima la seguente formola generale.

<sup>1</sup> MORIN, *Leçons de Mécanique pratique*, première partie.



Primieramente si supponga di ricercare il volume  $V$  del solido  $A B' C D'$  (fig. 57) terminato inferiormente dal trapezio orizzontale  $A B C D$  coi lati  $AB$ ,  $CD$  paralleli, dalle quattro facce verticali  $AA'B'B$ ,  $BB'C'C$ ,  $CC'D'D$ ,  $DD'A'A$ , e superiormente da una superficie curva  $A'B'C'D'$  tale che la sua intersezione con qualsivoglia piano verticale parallelo ai due  $AA'B'B$ ,  $CC'D'D$  sia una linea retta. Per brevità facendo  $AA' = a$ ,  $BB' = b$ ,  $CC' = c$ ,  $DD' = d$ , e  $AB = m$ ,  $DC = n$ ,

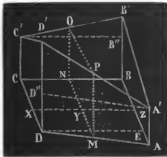


Fig. 57.

e chiamando  $l$  la distanza  $ZX$  delle basi parallele  $AA'B'B$ ,  $CC'D'D$ , il volume richiesto si esprime con la formula

$$V = \frac{l}{12} \left( (n + 2m)(a + b) + (2n + m)(c + d) \right)^{\dagger}$$

<sup>†</sup> Ecco come si può dimostrare questa formula a coloro che conoscono i principii del calcolo differenziale e integrale. Ritenute le stesse denominazioni, si faccia una sezione  $P O N M$  parallela ai piani verticali  $AA'B'B$ ,  $CC'D'D$ , e chiamando  $x$  la distanza  $XY$ , avremo per l'area  $T$  del trapezio  $P O M N$

$$(1) \quad T = (MP + ON) \frac{MN}{2}$$

Ma primieramente da  $A'$  conducendo nel trapezio  $DD'A'A$  la  $A'D''$  parallela ad  $AD$ , si ricavano le proporzioni

$$\begin{aligned} AM : AD &:: MP - a : d - a \\ AM : AD &:: l - x : l \end{aligned}$$

dalle quali avremo

$$(2) \quad MP = \frac{(l-x)(d-a) + al}{l},$$

in secondo luogo da  $C'$  conducendo nel trapezio  $BB'C'C$  la  $C'B''$  parallela a  $BC$  si ottengono

$$\begin{aligned} NC : BC &:: NO - c : b - c \\ NC : BC &:: x : l \end{aligned}$$

Supponendo ora che allo stesso trapezio ABCD insista inferiormente un solido come il superiore compreso fra il prolunga-

dalle quali avremo

$$(3) \quad NO = \frac{(b-c)x + cl}{l}.$$

Finalmente conducendo da D nel trapezio ABCD la DE parallela a BC, si hanno le

$$\begin{aligned} MD : AD &:: MN - n : m - n \\ MD : AD &:: x : l \end{aligned}$$

d'onde avremo

$$(4) \quad MN = \frac{(m-n)x + nl}{l}$$

dunque sostituendo nella formula (1) i valori (2), (3), (4) trovati avremo

$$T = \frac{[(l-x)(d-a) + ad + (b-c)x + cl] [(m-n)x + nl]}{2l^2}$$

ossia

$$T = \frac{(m-n)[(a+b)-(c+d)]x^2 - [(2n-m)(c+d) - n(a+b)]lx + n(d+c)l^2}{2l^2}.$$

Moltiplicando adesso questo valore per il differenziale di  $x$ , si avrà il solido differenziale

$$dV = T \cdot dx = \frac{(m-n)[(a+b)-(c+d)]x^2 dx - [(2n-m)(c+d) + n(a+b)]lxdx + n(d+c)l^2 dx}{2l^2}$$

dipoi integrando questa formula, ed estendendo l'integrale da  $x=0$  ad  $x=l$  avremo

$$V = \frac{l}{2l^2} \int_0^l (m-n)[(a+b)-(c+d)]x^2 dx - [(2n-m)(c+d) + n(a+b)]lxdx + n(d+c)l^2 dx$$

cioè, effettuata che sia l'integrazione, si ridurrà a

$$V = \frac{l}{2} \left[ \frac{(m-n)[(a+b)-(c+d)]}{3} - \frac{(2n-m)(c+d) + n(a+b)}{2} + n(d+c) \right]$$

e finalmente riducendo

$$V = \frac{l}{42} \left[ (n+2m)(a+b) + (2n+m)(c+d) \right]$$

mento dei quattro piani verticali, e terminato al di sotto da una superficie curva della indole stessa della superiore, chiamando  $a', b', c', d'$  i lati verticali corrispondenti ai lati  $a, b, c, d$  e  $V'$  il volume, otterremo in pari modo

$$V' = \frac{l}{12} \left( (n + 2m)(a' + b') + (2n + m)(c' + d') \right)$$

Dunque facendo  $a + a' = \alpha$ ,  $b + b' = \beta$ ,  $c + c' = \gamma$ ,  $d + d' = \delta$ , e chiamando  $S$  la somma dei volumi  $V, V'$  avremo finalmente

$$S = \frac{l}{12} \left( (n + 2m)(\alpha + \beta) + (2n + m)(\gamma + \delta) \right)$$

Tale è la formola proposta dallo Sganzin, e consigliata dal Cavalieri,<sup>1</sup> che esprime in generale il volume di un solido compreso fra quattro facce verticali, due delle quali parallele, e terminato sopra e sotto da due superficie curve dell'indole indicata. L'arte dell'ingegnere ne' progetti dei lavori di terra riduce a questo caso generale tutti i solidi parziali componenti i vari tronchi di sterri e di riporti compresi fra due sezioni consecutive.

92. Per esempio si cerchi il volume di un solido della forma da noi considerata in cui sia

$l = 100$ ,  $n = 7$ ,  $m = 10$ ,  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 25$ ,  $\gamma = 14$ ,  $\delta = 4$  metri.

Sostituiti questi valori nella formola generale ed effettuati i calcoli numerici avremo

$$S = 9675 \text{ metri cubi}$$

per il valore del richiesto volume. \*

<sup>1</sup> SGANZIN, *Programme au résumé des leçons d'un cours de construction*, leç. XVI.—CAVALIERI, *Istituzioni di Architettura statica e idraulica*, libro V, cap. III.

\* Col metodo delle dimensioni ragguagliate (§ 90) il volume del solido della forma da noi supposta si fa uguale al prodotto della distanza fra le due basi parallele, della semisomma della lunghezza delle due basi, e della quarta parte delli spigoli paralleli che termi-

93. In alcune piccole operazioni ed in certi casi si può ottenere meccanicamente il volume di un corpo qualunque irregolare. La fisica insegna: 1° che un corpo immerso in un liquido sposta un volume di liquido equivalente al suo volume:

nano le basi medesime. Ritenute le stesse denominazioni del problema (§ 91), il solido vien rappresentato dalla formula

$$S = l \times \frac{(m + n)}{2} \times \frac{(x + \beta + \gamma + \delta)}{4},$$

in cui sostituendo gli stessi valori, si avrà

$$S = 9562,5 \text{ metri cubi.}$$

Col metodo poi delle sezioni raggugliate il volume si fa uguale alla semisomma delle due basi parallele moltiplicata per la loro distanza cioè

$$S = \frac{l}{4} [m(x + \beta) + n(\gamma + \delta)]$$

e quindi sostituendo i suddetti valori avremo

$$S = 9900 \text{ metri cubi.}$$

Confrontando questo valore con quello ottenuto dalla formula rigorosa, si trova che il primo è 442,5 metri cubi meno del giusto valore ed il secondo lo oltrepassa di 325 metri cubi. Ora se facciamo

$$l = 400, m = 9, n = 2, x = 8, \beta = 43, \gamma = 27, \delta = 25$$

col metodo delle dimensioni raggugliate avremo

$$S = 40037,5$$

e da quello delle sezioni raggugliate avremo

$$S = 7325,$$

mentre colla formula rigorosa avremo

$$S = 9133,33.$$

Dunque in questo caso abbiamo al contrario che il primo valore è maggiore di 904,17 metri cubi, ed il secondo minore di 4808,33 metri cubi del valore ottenuto rigorosamente. La contraddizione in cui si trovano questi risultati evidentemente conferma la immensa erroneità dei due metodi empirici da noi avvertiti (§ 90).

2° Che i volumi di ugual densità sono proporzionali ai loro pesi.

Perciò se  $V$  è il volume noto di un dato corpo preso per termine di confronto, ed  $x$  il volume del corpo da determinarsi, immersi ambedue in un liquido sposteranno volumi equivalenti rispettivamente; allora essendo  $P$ , e  $p$  i pesi loro, si stabilirà

$$P : p :: V : x$$

da cui si ricava il volume  $x$ . Più semplicemente si può raccogliere il liquido spostato dal corpo in un vaso di forma parallelepipedo rettangola, ove si possano misurare le dimensioni della nuova forma del liquido contenuto per quindi calcolarne il volume  $x$ .

In alcuni casi poi può tornare utile, per render più spedite le



Fig. 58.

operazioni, di avere, per esempio, un vaso cilindrico ABCD (fig. 58) che si riempia di un liquido come acqua fino ad una linea di livello  $abc$ . Da questa si partano le divisioni di una scala  $nm$ , le quali indichino i volumi della capacità del vaso al di sopra della linea  $abc$ . Allora immergendo il corpo  $S$ , il liquido si eleverà in  $a'b'c'$ , e la divisione della scala segnata da questo nuovo livello indicherà il volume cilindrico d'acqua compreso fra le basi  $abc$ ,  $a'b'c'$  spostato dal corpo  $S$ , ossia il volume dello stesso corpo.

In tutte le arti ove si richiede la fusione di un metallo è necessario saper determinare il volume del corpo da riprodursi onde calcolare la quantità di metallo da impiegarsi: ed il giudizio dell'artista sceglierà quello fra i metodi di ricubare che più conviene alla qualità del suo lavoro.

## DELLE SEZIONI CONICHE.

### LEZIONE QUINTA.

*Genesi delle sezioni coniche. — Applicazioni alle ombre, all'equilibrio dei fluidi, all'Architettura ed alla Prospettiva.*

**Genesi delle sezioni coniche.** — 94. La superficie di un cono qualunque tagliata da un piano dà luogo a diverse linee d'intersezione distinte fra loro secondo il rapporto di posizione del piano secante coll'asse del cono, le quali si dicono in generale *sezioni coniche*.

95. Per fissare le idee si supponga in primo luogo che pel vertice  $V$  di un cono retto  $VABD$  (fig. 59) e per due punti  $D, B$  qualunque della circonferenza  $ABD$  della base si faccia passare un piano secante  $MNB D$ . Se i tre punti  $V, B, D$  trovar si debbono contemporaneamente sulla superficie conica e sul piano  $MNB D$ , le linee  $VB, VD$  che uniscono il vertice  $V$  con i punti  $B$  e  $D$  della base  $ABDC$  giaceranno insieme sulla superficie conica e sul piano, e la linea di unione  $BD$  giacerà insieme sulla base e sul piano; ma le linee d'intersezione  $VB, VD$  essendo apotemi del cono, sono rette ed eguali fra loro, e la linea  $CB$  è parimente retta; dunque la

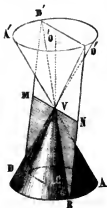


Fig. 59.

sezione  $BVD$  generata da un piano  $MNB D$  che taglia pel vertice

un cono VABD è un triangolo rettilineo ed isoscele colla base BD posta sulla base ABDC del cono.

96. Da questa proposizione ne consegue che se il piano secante MNBD passa per l'asse  $VC$  del cono, il triangolo BVD diviene perpendicolare al circolo ABDC, e la sua base BD si cangia in un diametro di questo; e siccome ogni corda di un circolo è minore del diametro, l'area della sezione fatta per l'asse del cono è maggiore di qualunque altra sezione triangolare.

Supponendo invece un secondo cono VA'B'D' uguale al cono VABD e situato col vertice opposto e coll'asse VC' in direzione dell'asse VC, il piano MNBD prolungato al di là del vertice V lo taglierà ugualmente, e la sezione B'VD' nuovamente generata sarà un triangolo uguale e col vertice opposto al triangolo BVD. Immaginando poi che le superficie dei coni VABD, VA'B'D' si estendano infinitamente al di là delle basi ABDC, A'B'D'C' le sezioni diverranno spazi infiniti, perchè comprese fra i lati infiniti degli angoli BVD, B'VD' opposti al vertice.

97. Si supponga in secondo luogo che il cono retto VABD (fig. 60) si tagli con un piano MNOP parallelamente alla sua

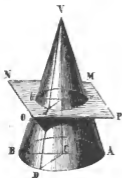


Fig. 60.

base ABDC. La sezione  $abc$  generata verrà incontrata in un punto  $c$  dall'asse VC condotto nel cono. E per l'asse VC facendo passare un piano triangolare AVB, siccome la sezione  $abc$  è parallela al circolo ABDC, le linee d'intersezione  $ab$ , AB saranno parallele fra loro. Ora se per un punto qualunque  $d$  del perimetro  $abd$  della sezione si conduca un altro piano triangolare CVD, le intersezioni  $cd$ , CD saranno parimente parallele fra loro, e

per ciò daranno  $cd : CD :: Vc : VC$ ; ma per le parallele  $ac$ , AC abbiamo

$$ac : AC :: Vc : VC$$

Dunque avremo

$$cd : CD :: ac : AC,$$

in cui essendo  $CD$  eguale ad  $AC$ , come ambedue raggi di un medesimo circolo  $ABDC$  (§ 96), anco  $cd$  sarà uguale ad  $ac$ . Ugualmente si dimostrerà che ogni altra retta condotta dal perimetro della sezione  $abcd$  al punto  $c$  è uguale ad  $ad$ . Dunque : *ogni sezione  $abcd$  generata da un piano secante  $MNOP$  parallelo alla base  $ABDC$  di un cono retto è sempre un circolo, che ha per centro il punto  $c$  d'incontro dell'asse col piano secante.* <sup>1</sup>

98. Il triangolo ed il circolo essendo considerati specialmente dalla Geometria elementare, non ci occuperemo di studiare le proprietà di queste due sezioni coniche, delle quali abbiamo premessa unicamente la dimostrazione della generazione per l'ordine della materia, e per introduzione alla conoscenza delle altre sezioni. Gli antichi Geometri hanno chiamato specialmente *sezioni coniche* le curve che formano i contorni delle sezioni fatte in un cono da un piano che tagli l'asse obliquamente. Queste curve così celebri nella Geometria esercitarono la sagacità di quei Geometri, e molte e belle proprietà sono state da essi scoperte e dimostrate senza prevedere che mentre stavano preparando la strada alla cognizione delle leggi che regolano l'universo, disprezavano il campo ove la industria

<sup>1</sup> Ponendo mente al modo con cui può suppirsi generata una superficie conica (§ 43) ci si persuade con più generalità di questa proposizione; infatti tutti i punti della generatrice del cono, nel generare la superficie conica, generano altrettante circonferenze parallele a quella della sua direttrice, perciò tutte le sezioni parallele alla base sono altrettanti circoli. Ma ho creduto migliore per facilitare l'intelligenza dei principianti di esporre una dimostrazione geometrica più concreta preferendola, come sempre farò, a considerazioni astratte a loro meno familiari.



umana doveva raccogliere dappoi il frutto delle loro applicazioni.

99. Or bene il cono  $VMDM'$  (*fig. 61*) si tagli con un triangolo qualunque  $DVB$  che passi per il suo asse  $VC$ . Per un punto  $M$  della circonferenza  $MDM'B$  della base si tiri la corda  $MM'$  perpendicolare al diametro  $BD$  (§ 96), e quindi pel punto  $P$  ove si tagliano, si conduca nel piano del triangolo  $DVB$  una retta  $PQ$  che incontrerà il lato o apotema  $VB$  in un punto  $A$ ; e finalmente per la corda  $MM'$  e per la retta  $PQ$  facendo passare un piano  $MM'NO$ , questo taglierà la superficie conica secondo una linea d'intersezione, che è quella appunto chiamata *sezione conica* (§ 98).

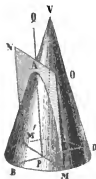


Fig. 61.

Se si immagina tagliata la superficie conica con quanti piani circolari si voglia paralleli alla base, le loro linee d'intersezione col piano  $MM'NO$  saranno rispettivamente altrettante corde parallele alla corda  $MM'$ ; ma il triangolo  $DVB$  dividendo per metà la corda  $MM'$  divide per metà anco le altre; dunque la linea  $PQ$  divide in generale una sezione conica  $MAM'$  in due parti uguali e simmetriche. La retta  $PQ$  si dice *asse*, ed il punto  $A$  si chiama *vertice* della curva.<sup>1</sup> L'asse della curva è ordinariamente preso per asse delle ascisse, ed il vertice per origine (§ 60).

Ora vediamo come dalla triplice posizione che può darsi alla linea retta  $PQ$  nascano tre linee curve ben distinte fra loro.

<sup>1</sup> La curva, qualunque sia, volge in tutti i punti la concavità al proprio asse, ed è sempre agiata da una linea retta in due soli punti, perchè la superficie stessa del cono volge la concavità al proprio asse, e non può essere attraversata da una linea retta in più di due punti.

100. Primieramente se la retta o asse  $PQ$  (fig. 62) è parallela al lato  $VD$  del triangolo, ossia all'apotema opposto del cono, la sezione conica  $MAM'$  si chiama *parabola*; Ma l'altezza

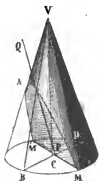


Fig. 62.

$VC$  del cono non essendo determinata da alcun limite, la superficie conica in un col piano secante si estende infinitamente al di là della base  $MDM'C$ , e quindi la linea  $MAM'$  non torna a ricongiungersi giammai nè cessa di esser divisa in due parti  $AM$ ,  $AM'$  uguali e simmetriche dall'asse  $PQ$  prolungato anche esso all'infinito; Dunque *la parabola è una curva piana ed aperta* (§§ 4, 5) *con un sol vertice, e divisa dall'asse in due rami infiniti, uguali e simmetrici* (§ 99).

101. Se in secondo luogo l'asse  $PQ$  (fig. 63) diverge dal lato  $VB$  e converge sul lato  $VD$ , prolungato da una parte e dall'altra del punto  $P$  incontrerà ambedue gli apotemi opposti  $VB$ ,  $VD$  del cono nei punti  $A$ ,  $a$ , e la sezione conica  $MAM'a$  che ne risulta si dice *ellisse*. Ma siccome il

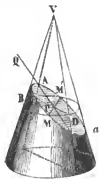


Fig. 63.

piano secante taglia tutti gli apotemi del cono, la linea di intersezione  $MAM'$  torna a ricongiungersi nel punto  $a$  opposto all'origine  $A$ ; Dunque *la ellisse è una curva piana rientrante* (§§ 4, 5) *con due vertici opposti, e divisa dall'asse in due parti uguali*.

102. Quando invece si prendesse un cilindro retto  $D'D''B''B'$  con la base circolare  $MBM'C$ , e vi si procedesse con analoghe considerazioni (§§ 99, 101), o in più brevi termini si tagliasse con un piano obliquamente all'asse  $C'C''$  ossia ai lati del cilindro, la linea di intersezione  $MAM'a$

del piano secante colla superficie cilindrica diverrebbe una curva piana rientrante con due vertici  $a, A$  situati sopra due lati (*fig. 64*)  $B'B''$ ,  $D'D''$  opposti del cilindro, e sarebbe parimente una ellisse.



Fig. 64.

diverga dal lato  $VD$  lo può incontrare, quando si supponga prolungato oltre il vertice  $V$ , in un punto  $a$ , immaginando cioè



Fig. 65.

A suo luogo ne avremo una conferma col dimostrare che ambedue le sezioni, che si ottengono tagliando obliquamente con un piano i lati del cono e del cilindro, godono delle medesime proprietà. <sup>1</sup>

403. Se finalmente l'asse  $PQ$  (*fig. 65*) diverge da ambedue gli apotemi  $VB$ ,  $VD$ , prolungato anco infinitamente al di là della base non incontrerà giammai il lato  $VB$ , e la sezione conica  $MAM'$  che si ottiene si chiama *iperbola*. Ma sebbene l'asse  $PQ$

diverga dal lato  $VD$  lo può incontrare, quando si supponga prolungato oltre il vertice  $V$ , in un punto  $a$ , immaginando cioè che gli apotemi del cono dopo essersi tagliati nel punto  $V$  proseguano ad estendersi anco al di là formando un nuovo cono  $Vmbm'd$  uguale ed opposto al primo  $VMBM'D$ . In tal caso il piano secante potendo estendersi infinitamente al di qua e al di là del comune vertice  $V$  insieme con le superficie coniche, tagliato il primo cono taglierà anco il secondo ugualmente, e darà luogo a due sezioni  $MAM'$ ,  $mam'$  staccate una dall'altra di tutto l'intervallo  $Aa$ ; Dunque *la iperbola è una curva piana ed aperta con due vertici e*

<sup>1</sup> Fin d'ora ci possiamo persuadere della analogia delle sezioni ellittiche fatte nel cono e nel cilindro, considerando l'analogia della loro generazione. Infatti, ambedue le superficie di questi solidi hanno ugualmente per generatrice una linea retta, la quale se è inclinata o

due <sup>braccio</sup> nappe separate ed opposte, ciascuna delle quali ha due rami infiniti, uguali e simmetrici intorno all'asse.

104. Invece di due coni, i Geometri qualche volta ne hanno supposti quattro, uguali ed opposti al vertice due a due, i quali sieno in contatto immediato per i loro apotemi. Per farsi una idea chiara di questa disposizione, si immagini due coni interi, di cui gli angoli al vertice  $AVB$ ,  $BVA'$  (fig. 66) corrispondenti alle sezioni fatte pel loro asse sieno supplemento

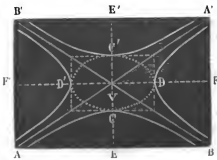


Fig. 66.

uno dell'altro, cioè presi insieme equivalgono a due angoli retti, ovvero la loro somma sia di 180 gradi. Se ambedue i coni si tagliano in due parti uguali con due piani che passino pei loro assi, ne risultano quattro mezzi coni; allora poste le superficie delle loro sezioni triangolari sopra un piano in modo che le metà di uno stesso cono si trovino opposte e i quattro vertici concorrano nel medesimo punto  $V$ , i triangoli  $AVB$ ,  $A'VB'$ ,  $BVA'$ ,  $B'VA$  formeranno insieme un parallelogrammo, o un rettangolo  $ABA'B'$ , di cui le diagonali  $AA'$ ,  $BB'$  sono composte dei lati dei mezzi-coni. Ora immaginando che i mezzi-coni così disposti vengano tagliati da un piano parallelo a quello sul quale sono stati posati, si generano quattro nappe  $ACB$ ,

parallela all'asse genera la superficie del cono o del cilindro § 13°. Ma supponendo che la linea generatrice incontri l'asse ad una distanza infinita dalla base, l'asse e la generatrice si possono ritenere come parallele, e quindi gli apotemi del cono come lati di un cilindro. Dunque la superficie del cilindro potendo considerarsi un caso particolare della generazione del cono, ogni sua sezione obliqua è della medesima natura di quelle fatte nel cono cioè una *ellisse*.

$A'C'B'$ ,  $BDA'$ ,  $B'D'A$  di due iperbole, le quali si dicono dai Geometri *iperbole coniugate*,<sup>1</sup> per gli stretti rapporti che hanno fra loro, e che studieremo in seguito. Le diagonali  $AA'$ ,  $BB'$  che rappresentano i lati dei coni, sono avvicinate continuamente dai rami delle iperbole senza poter esser toccate giammai, per cui sono chiamate *asintoti* dalla parola greca che ha un tal significato. Il punto  $V$  ove si tagliano gli assi  $EE'$ ,  $FF'$  e gli asintoti  $AA'$ ,  $BB'$  si chiama *centro*.

Quando le porzioni  $CC'$ ,  $DD'$  degli assi  $EE'$ ,  $FF'$  (*fig. 67*) comprese fra i vertici  $C$ ,  $C'$  e  $D$ ,  $D'$  delle iperbole sono uguali, gli asintoti si tagliano nel centro ad angolo retto, e le iperbole risultano uguali, e si dicono *iperbole equilatera* o *circolari*; poichè se dal centro  $V$  si descrive la circonferenza  $CDC'D'$  questa toccherà i quattro vertici,  $C$ ,  $C'$ ,  $D$ ,  $D'$  delle medesime. Ma quando gli asintoti si tagliano obliquamente, per i vertici stessi (*fig. 66*) non può

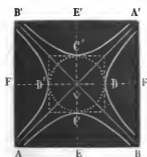


Fig. 67.

passare che una ellisse  $CDC'D'$ , la quale qualche volta distingue le iperbole coniugate col nome di *iperbole ellittiche*.

405. Or dunque; la *parabola* è quella sezione conica che si ottiene quando il piano secante è parallelo all'apotema del cono; l'*ellisse* è quella sezione conica che si ottiene quando il piano secante taglia il cono da una parte all'altra; e la *iperbola* è quella sezione conica che si ottiene quando il piano secante ha tale obliquità da ritagliare col suo prolungamento un cono

<sup>1</sup> Siccome possiamo prendere un numero qualunque di coni, di cui la somma degli angoli al vertice sia di due angoli retti ossia  $180^\circ$ , e le loro metà possono esser disposte in un modo analogo, un piano che le tagli tutto genererà altrettante nappe di iperbole. Ma ciò oltre a dar luogo a molteplici considerazioni non elementari, non è di utilità ad alcuna pratica delle arti.

uguale e col vertice opposto al primo. <sup>1</sup> Quando infine il piano secante tagli la superficie del *cono obliquo*, o in generale di un *conoide*, <sup>2</sup> secondo le tre posizioni da noi contemplate, le tre curve corrispondenti che vengono generate sono di natura parabolica, ellittica o iperbolica; ma siccome il loro studio conduce a considerazioni troppo superiori all'elementarità di que-

<sup>1</sup> Chiamando  $\beta$  l'angolo al vertice del cono ed  $\alpha$  l'angolo d'inclinazione che fa il piano secante dalla parte del vertice col primo apotema da esso tagliato, la sezione del cono sarà una *parabola*, una *ellisse*, o una *iperbola*, secondochè si verificherà  $\beta + \alpha = 180^\circ$ ,  $\beta + \alpha < 180^\circ$ , o  $\beta + \alpha > 180^\circ$ . Queste espressioni danno una spiegazione dei nomi di parabola di ellisse e di iperbola dati alle tre sezioni coniche dai Geometri greci. Essi sono tratti dalle parole greche *παραβολή*, *ἐλλίψις*, *ὑπερβολή* che significano *uguaglianza*, *difetto* ed *eccesso*. Ma veramente questi significati si riferiscono al rapporto del quadrato di una ordinata qualunque coll'ascissa corrispondente. Nella parabola questo rapporto è uguale ad una quantità costante, nell'ellisse è minore, e nella iperbola è maggiore. Infatti: Dall'equazione generale delle sezioni coniche

$$y^2 = px - \frac{px^2}{2a},$$

ove  $p$  è una quantità costante corrispondente ad una linea retta determinata, che come vedremo in seguito si chiama *parametro*, si trae il rapporto

$$\frac{y^2}{x} = p - \frac{px}{2a};$$

allora quando si prende  $\frac{px}{2a} = 0$  si ottiene il rapporto  $\frac{y^2}{x}$  nella parabola, che è esattamente uguale a  $p$ ; prendendo il segno superiore il rapporto  $\frac{y^2}{x}$  corrisponde all'ellisse, ed è più piccolo di  $p$  della quantità  $\frac{px}{2a}$ ; e prendendo finalmente il segno inferiore si ha quel rapporto corrispondente alla iperbola che eccede  $p$  della medesima quantità  $\frac{px}{2a}$ .

<sup>2</sup> Si chiama dalla Geometria *conoide* o *superficie conoidale* quella che ha per generatrice una linea retta mobile intorno ad un suo punto che è il vertice del solido, e per direttrice una linea curva qualunque.

ste lezioni e non applicabili alla pratica, tratteremo unicamente delle sezioni coniche propriamente dette, tanto mirabili come leggi di natura quanto feconde di applicazioni alle arti ed all'industria.

**Applicazioni. 406.** — Collocando una candela accesa sopra una tavola rotonda ed orizzontale *abc* (fig. 68) in modo

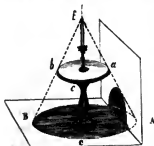


Fig. 68.

che la sua fiaccola *f* sia sulla verticale *fc* che passa per il centro della medesima, quelli fra i raggi luminosi emanati dalla fiaccola che radono il contorno circolare della tavola formano gli apotemi di una superficie conica di rivoluzione, la di cui intersezione *ABC* col pavimento è la linea di separazione fra l'ombra portata dalla tavola e la parte illumina-

nata. Questa linea di separazione è la circonferenza di un circolo, quando il pavimento che rappresenta il piano secante è perfettamente orizzontale (§ 97). Ma quando la tavola sia talmente vicina ad un muro verticale da proiettarvi una parte della sua ombra, la superficie conica viene ad esser tagliata dal piano del muro parallelo all'asse, e la linea di separazione fra l'ombra e la parte illuminata del muro è in conseguenza una nappa di Iperbola (§ 403). E se la medesima tavola proiettasse la sua ombra sopra un piano inclinato, di cui il grado di inclinazione rispetto alla verticale corrispondesse alle condizioni volute per la generazione della parabola o della ellisse, la linea di separazione fra l'ombra e la parte illuminata di esso sarà l'una o l'altra delle due sezioni coniche (§§ 400, 401).

407. Nelle lanterne portatili, le quali hanno il vetro circolare, i raggi luminosi che partono dalla fiaccola e radono la circonferenza del vetro formano una superficie conica, la

intersezione della quale col piano di un muro ABCD (*fig. 69*) o del pavimento ADEF su cui si dirige il cono luminoso, è la linea di separazione fra la parte illuminata dalla lanterna, e

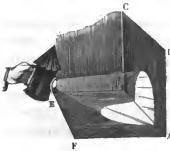


Fig. 69.

quella tuttavia nella ombra. Ora questa linea di separazione può al solito essere una circonferenza, una parabola, una ellisse, o una iperbola secondo la direzione che si dà all'asse del cono luminoso della lanterna sul piano del muro o del pavimento.

Siccome si suppone che i raggi del sole per la grandezza dell'astro e per la sua distanza dalla terra giungano sulla superficie terrestre paralleli a se stessi, presentando un disco circolare che (*fig. 70*) abbia un foro circolare concentrico perpendicolarmente alla loro direzione, il primo intercettandoli lascerà nell'ombra uno spazio cilindrico, ed il secondo darà invece il passaggio ad un

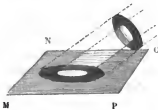


Fig. 70.

fascio cilindrico di luce. Se sopra un piano MNOP si proietta l'ombra del disco, o vi si dirige il fascio luminoso che passa pel foro, la linea di separazione fra l'ombra e la parte illuminata del piano è un circolo o una ellisse secondo che il piano sarà perpendicolare, o obliquo alla direzione dei raggi solari (§ 402).

408. Riempiendo d'acqua un vaso di forma conica, per esempio un imbuto chiuso inferiormente, la linea di livello segnata dal liquido nella superficie interna dell'imbuto è la linea d'intersezione della superficie conica con un piano orizzontale rappresentato e formato dalla superficie superiore di livello del liquido. Questa linea di livello è un cerchio o una ellisse se-



condo che l'asse dell'imbuto è verticale o inclinato all'orizzonte di un dato angolo (§§ 97, 101).

Se il vaso ripieno d'acqua fosse cilindrico, per esempio un bicchiere, la linea di livello segnata dal liquido sarà parimente un cerchio o un'ellisse quando il bicchiere venga posto sopra un piano orizzontale, o vi sia posto in una posizione inclinata (§ 102). Quando lo imbuto ed il bicchiere sieno invece immersi in ambedue le posizioni in un liquido in riposo, il quale segni le linee di livello sulla loro superficie esteriore, si otterranno le medesime curve. Per ottenere le altre due sezioni coniche, cioè la parabola e la iperbola, basterà immergere l'imbuto in un vaso pieno di un liquido secondo i gradi delle inclinazioni dell'asse dell'imbuto sulla superficie del liquido richiesti dalla condizione della generazione di queste due curve (§§ 100, 103).

109. Nell'architettura spesso si impiega la ellisse e qualche volta la parabola, per le proprietà geometriche di cui godono queste curve, nella figura da darsi alle cantine nella costruzione degli archi o delle volte, come in seguito vedremo; ma non è frequente il caso di veder rappresentate nelle costruzioni le sezioni coniche come risultato delle intersezioni di superficie. Ecco alcuni esempi: se sopra la copertura inclinata di un edificio si eleva una torre circolare esteriormente verticale o a scarpa, la linea di intersezione del tetto con la parete esterna della torre è un'ellisse. È parimente un'ellisse la intersezione delle superficie d'*intradosso* delle volte coniche o cilindriche con le pareti verticali oblique al loro asse.

Se la copertura di un edificio, di cui il muro esterno sia formato di parti rettilinee e di segmenti di cerchio, ha una pendenza uguale dappertutto e diretta normalmente verso ogni punto del perimetro, essa risulta composta di tetti a falda piana e di tetti conici, e perciò la linea di *compluvio abc* (fig. 71) costituita dalla intersezione degli uni con gli altri è una para-

bola. E se in una torre circolare col muro esternamente scarpato è praticata una porta, il contorno del taglio verticale fatto sulla sua parete esterna è una iperbola.



Fig. 71.

410. La prospettiva offre pure l'applicazione delle intersezioni delle superficie coniche con un piano. Se immaginiamo un piano su cui sia tracciato un circolo perpendicolare alla direzione dello sguardo di un osservatore, tutti i raggi visuali che partono dal suo occhio e passano per la circonferenza del circolo sono altrettanti apotemi di una superficie conica, la quale incontrando una parete

obliquamente, darà luogo ad una curva, che può essere una delle tre sezioni coniche. Il circolo è la prospettiva della curva. Se invece il circolo è descritto sopra un piano obliquo qualunque, i raggi visuali condotti a tutti i punti della sua circonferenza formano una superficie conica obliqua; l'intersezione di questa superficie col piano del quadro può esser una sezione conica qualunque, che più spesso è una ellisse, ed ecco il perchè i circoli veduti in prospettiva compariscono altrettante ellissi. Ma le superficie coniche che si incontrano nella prospettiva non sono sempre di rivoluzione e oblique, anzi vi si incontrano di ogni specie. I raggi visuali diretti dall'occhio dell'osservatore verso tutti i punti di una curva qualunque situata al di là del piano del quadro formano una superficie

conoidale (§ 105 nota 1), di cui l'intersezione con questo piano, che è di natura conica, è la prospettiva della curva.

411. La geometria descrittiva, oltre a rappresentare per mezzo delle proiezioni le superficie coniche e cilindriche e le diverse posizioni dei piani secanti, insegna con rigor geometrico a determinare le linee di loro intersezione. E colla scorta dei metodi stabiliti si applica a risolvere le innumerevoli questioni cui danno luogo gli effetti variati delle ombre e della luce, a sciogliere i diversi problemi che presentano le molteplici costruzioni sì murarie che in legno e in metallo, a rappresentare tutti gli oggetti della natura quali appariscono al nostro sguardo, stabilendo le regole della prospettiva. Perciò rimandiamo gli studiosi alle opere classiche di Monge, La-Croix, La Vallée, Leroy e di altri, nelle quali troveranno risolte le accennate questioni.

---

**Parabola.**

LEZIONE SESTA.

*Proprietà geometriche della parabola. — Tangenti e Normali. —  
Proprietà fisica.*

**Proprietà geometriche della parabola.** — 112. Sia la sezione  $MAM'$  fatta nel cono  $VMDM'B$  (fig. 72) una parabola (§ 100). Il piano del triangolo  $BVD$  che passa per l'asse del



Fig. 72.

cono sia perpendicolare alla sezione  $MAM'$ , e la divida per metà secondo la linea o asse  $AP$  (§ 99), che nella parabola prende il nome di *asse principale*. Le linee d'intersezione  $bd$ ,  $BD$  del piano triangolare  $BVD$  con due sezioni circolari qualunque  $mdm'b$ ,  $MDM'B$  sono due diametri paralleli fra loro, e le linee  $mm'$ ,  $MM'$  della sezione  $MAM'$  coi medesimi cerchi sono due corde pure parallele fra loro, ed appartengono contemporaneamente ai cerchi ed alla parabola. Inoltre le

corde  $mm'$ ,  $MM'$  saranno perpendicolari rispettivamente ai diametri  $bd$ ,  $BD$  dei cerchi, e saranno pure perpendicolari all'asse principale  $AP$ , ossia saranno doppie ordinate rettangole della parabola di cui  $Ap$ ,  $AP$  sono le ascisse (§ 61). Ciò posto, siccome nel circolo la metà della corda perpendicolare al diametro è media

proporzionale fra i segmenti in cui resta diviso, avremo

$$\overline{mp}^2 = \overline{m'p}^2 = bp \times pd$$

$$\overline{MP}^2 = \overline{M'P}^2 = BP \times PD$$

colle quali stabiliremo

$$\overline{mp}^2 : \overline{MP}^2 :: bp \times pd : BP \times PD$$

e per la natura della generazione della parabola essendo l'asse AP parallelo all'apotema VB, i segmenti  $bp$ , BP sono uguali, e la proporzione precedente si riduce a

$$\overline{mp}^2 : \overline{MP}^2 :: pd : PD ;$$

ma i triangoli simili  $Apd$ , APD danno

$$Ap : AP :: pd : PD ;$$

dunque avremo

$$(1) \overline{mp}^2 : \overline{MP}^2 :: Ap : AP$$

cioè nella parabola *i quadrati delle ordinate stanno in ragione diretta delle ascisse corrispondenti.*

413. Questa proprietà è appunto una fra le mirabili leggi geometriche di natura scoperte dal fondatore della Dinamica. Galileo creò la teorica della caduta dei gravi, scoprì la legge del movimento composto, e con esse determinò la traiettoria, ossia il cammino che percorre un proiettile lanciato nel vuoto parallelamente o obliquamente all'orizzonte. <sup>1</sup> Considerando la velocità uniforme impressa dalla forza di proiezione, e quella che va uniformemente accelerando per l'azione verticale della gravità, il sommo filosofo determinò i punti in cui si troverebbe il corpo alla fine di intervalli di tempo successivamente uguali. Questi punti costituiscono una curva, la quale ha per ascisse

<sup>1</sup> GALILEO, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due scienze nuove.* Giornata IV.

linee proporzionali agli spazi percorsi in tempi uguali con moto uniformemente accelerato, e per ordinate linee proporzionali ai medesimi tempi; ma in questo genere di moto, i quadrati dei tempi essendo proporzionali agli spazi, i quadrati delle ordinate stanno fra loro come le ascisse; dunque la curva descritta è una parabola. La resistenza del mezzo (acqua, aria, gaz, ec.), in cui vien lanciato un proiettile, sia un sasso, una palla di cannone, un getto di acqua, un fuoco d'artificio ec., modifica in modo sensibile il movimento, talchè la curva descritta si allontana notabilmente dalla parabola. Ciò nonostante la legge sussiste sempre, imperocchè si può mettere a calcolo quella resistenza valendosi della sua misura. Nella meccanica, ove gli studiosi spingano i loro studi, troveranno dimostrate tutte le verità geometriche relative al moto dei proiettili, e qui basta l'aver unicamente indicata questa legge di natura come un esempio della proprietà della parabola precedentemente esposta (§ 112).

114. Dalla medesima proprietà ne consegue chiaramente che il rapporto del quadrato di una ordinata qualunque alla rispettiva ascissa è costante. Infatti chiamatolo  $p$ , dalla proporzione (1) (§ 112) si rileva che

$$(2) \quad \frac{\overline{MP}^2}{AP} = \frac{\overline{mp}^2}{Ap} = p.$$

Il rapporto  $p$  si chiama il *parametro* della parabola; ma siccome dalla (2) si ottiene  $AP : MP :: MP : p$ . Dunque il *parametro*  $p$  di una parabola si esprime geometricamente con una linea che è sempre terza proporzionale dopo un'ascissa qualunque e la sua ordinata.

115. Ora da un punto  $M$  di una parabola  $MAm$  (fig. 73) si conduca la ordinata  $MP$ , e sulla metà della corda  $AM$ , condotta pel punto  $M$  e pel vertice  $A$ , si elevi una perpendicolare  $Bb$ . la

quale incontrerà l'asse in un punto C. Se si fa centro in C, e col raggio CA si descrive la semicirconferenza AMO, il segmento PO essendo terzo proporzionale fra il segmento o l'ascissa AP e la ordinata MP, sarà il *parametro* della parabola MAm (§ 413).

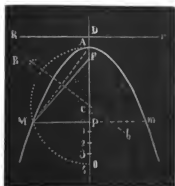


Fig. 73.

Se si divide il segmento o il parametro PO in quattro parti uguali, e si riporta una di esse sull'asse dal vertice A in F, il punto F così determinato si chiama il *fuoco* della parabola. Al contrario se una medesima parte si riporta esternamente sull'asse da A in D, e dal punto D si conduce una perpendicolare all'asse, la linea Rr così condotta si dice *direttrice* della parabola.

Finalmente la linea FM che unisce un punto qualunque della curva M col fuoco F si nomina il *raggio vettore* della parabola (§ 70 nota 2).

446. Tutto ciò ne porta a considerare un'altra importante

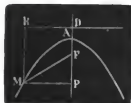


Fig. 74.

proprietà. Da un punto M qualunque conducendo il raggio vettore MF e l'ordinata MP (fig. 74) sappiamo che dal triangolo rettangolo FPM che ne risulta si ottiene

$$(1) \overline{FM}^2 = \overline{FP}^2 + \overline{MP}^2;$$

ma per la proprietà del parametro abbiamo (§§ 414, 415).

$$(2) \overline{MP}^2 = p \times AP = 4AF \times AP,$$

e dalla geometria elementare si apprende che

$$(3) \overline{FP}^2 = (AP - AF)^2 = \overline{AP}^2 - 2AF \times AP + \overline{AF}^2.$$

Dunque sostituendo queste espressioni (2) e (3) nella (1) avremo

$$\overline{FM}^2 = \overline{AP}^2 + 2AF \times AP + \overline{AF}^2 = (AP + AF)^2$$

ossia  $FM = AP + AF$ ;

perciò essendo  $AF = AD$  (§ 415), e la perpendicolare  $MR$  condotta alla direttrice dal punto  $M$  uguale a  $PD$ , sarà

$$FM = MR$$

cioè ogni punto della curva parabolica è ugualmente distante dal fuoco e dalla direttrice.

417. In una parabola  $MAm$  (fig. 75) le ordinate  $MP$ ,  $mp$  condotte dai punti estremi  $M, m$  di una corda  $Mm$  qualunque,



Fig. 75.

che taglia l'asse obliquamente in un punto  $O$ , danno luogo a rilevare una importantissima proprietà. Primieramente i triangoli  $MPO$ ,  $mpO$  danno la proporzione

$$OP : Op :: MP : mp,$$

che, alzando a quadrato ogni suo termine, si riduce a

$$\overline{OP}^2 : \overline{Op}^2 :: \overline{MP}^2 : \overline{mp}^2$$

ma è già noto (§ 412) che

$$\overline{MP}^2 : \overline{mp}^2 :: AP : Ap.$$

Dunque avremo

$$\overline{OP}^2 : \overline{Op}^2 :: AP : Ap;$$

ora decomponendo questa proporzione abbiamo

$$\overline{OP}^2 - \overline{Op}^2 : \overline{OP}^2 :: AP - Ap : AP,$$

la quale osservando che



$$OP^2 - \bar{Op}^2 = (OP - Op)(OP + Op) = (OP - Op) Pp$$

e che

$$AP - Ap = Pp$$

diverrà

$$(OP - Op) : OP :: OP : AP,$$

da cui nuovamente decomponendo e permutando si ottiene

$$Op : OP :: AO : AP;$$

e finalmente da questa avremo

$$AO - Op : AO :: AP - OP : AP$$

ossia

$$(1) Ap : AO :: AO : AP;$$

*cioè la porzione di asse compresa fra il vertice e l'incontro di una corda è media proporzionale fra le ascisse corrispondenti alle ordinate abbassate dai punti estremi della corda stessa.*

Ora questa proprietà si traduce in un'altra, che come vedremo è pregevolissima per una facile e semplice costruzione della curva. Infatti moltiplicando per i termini della proporzione identica

$$AO : AP :: AO : AP$$

quelli della (1) avremo

$$Ap : AP :: \overline{AO}^2 : \overline{AP}^2;$$

ma abbiamo trovato (§ 112) che

$$\overline{mp}^2 : \overline{MP}^2 :: Ap : AP.$$

Dunque avremo

$$\overline{mp}^2 : \overline{MP}^2 :: \overline{AO}^2 : \overline{AP}^2$$

ovvero

$$(2) mp : MP :: AO : AP;$$

*cioè l'ordinata minore condotta dall'estremità di una corda sta all'ordinata maggiore condotta dall'altra estremità, come l'asse intercetto dal vertice e dalla corda sta alla ascissa maggiore.*<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Se invece moltiplichiamo la proporzione (1) per la identica

$$Ap : AO :: Ap : AO$$

avremo

$$\overline{Ap}^2 : \overline{AO}^2 :: Ap : AP.$$

**Normali e tangenti.** — 418. Avanti tutto premetteremo che se da un punto  $M$  di una curva qualunque  $AM$  (fig. 76), riferita agli assi  $AX, AY$ , si conduce la retta  $MT$  tangente in  $M$  prolungata fino che incontra il prolungamento dell'asse  $AX$  nel punto  $T$ , la porzione  $MT$  di questa tangente compresa fra i prescritti limiti, cioè da  $M$  e  $T$ , si chiama in generale *tangente al punto  $M$* ; e la porzione  $PT$  dell'asse stesso chiusa fra il punto d'incontro  $T$  ed il piede  $P$  dell'ordinata  $MP$  abbassata dal punto  $M$  si dice *suttangente*. Se dal medesimo punto  $M$  si abbassa la  $MN$  perpendicolare alla tangente  $MT$  fino all'incontro

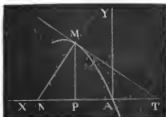


Fig. 76.

dell'asse  $AX$  nel punto  $N$ , la perpendicolare  $MN$  compresa fra i punti  $M$  ed  $N$  si chiama in generale *normale al punto  $M$* ; e finalmente la porzione  $PN$  dell'asse chiusa fra il punto d'incontro  $N$  ed il piede  $P$  dell'ordinata si dice *sunnormale*.

419. Ciò premesso, la proprietà della parabola di avere ogni punto ugualmente distante dal foco e dalla direttrice (§ 416) da la maniera di condurre una tangente ad un punto preso sulla curva. Dal punto  $M$  condotta la perpendicolare  $MR$  (fig. 77) alla direttrice si unisca il foco  $F$  con  $R$ , e da  $M$  si conduca la  $MT$  perpendicolare ad  $FR$ ; se da un punto qualunque  $m$  di  $MT$

ma al solito  $\overline{mp}^2 : \overline{MP}^2 :: Ap : AP.$

Dunque  $mp : MP :: Ap : AO;$

cioè l'ordinata minore sta alla maggiore, come l'ascissa minore sta alla stessa porzione di asse. Queste proprietà analoghe sono ambedue implicite nella proprietà espressa dalla proporzione (1); ma abbiamo posta in evidenza la (2) perchè essa, o questa volendo, senza ricorrere ad ulteriori dimostrazioni insegna direttamente una regola facile per la costruzione della parabola, che in seguito esporremo.

diverso da  $M$  si conducano inoltre le  $mR$ ,  $mF$  e la  $mr$  perpendicolare alla direttrice, la geometria elementare ci insegna che  $mr$  è più corta di  $mR$  ovvero di  $mF$ , perchè  $mR = mF$ ; onde il punto  $m$  essendo più vicino alla direttrice che al fuoco non è posto sulla curva; ma si dimostra in ugual modo che ogni altro punto di  $MT$  diverso da  $M$  è fuori della curva.



Fig. 77.

Dunque la retta  $MT$  avendo comune colla curva soltanto il punto  $M$  è tangente in  $M$ . Poichè  $MR$ ,  $FT$  sono parallele, l'angolo  $MTF = RMT = TMF$  ed il triangolo  $MTF$  è isoscele, e perciò  $MF = FT$ . Dunque prendendo  $FT$  uguale al raggio vettore  $MF$ , ed unendo  $T$  con  $M$ , la retta  $MT$  sarà la tangente al punto  $M$  preso sulla parabola, di cui sono noti l'asse ed il foco.

120. Quando sieno noti soltanto l'asse della parabola ed il vertice, si osservi che

$$AT = FT - AF$$

$$AP = DP - AD$$

ma  $FT = MF = MR = DP$

ed  $AF = AD$  (§ 115). Dunque  $AT = AP$  ovvero

$$PT = AP + AT = 2AP;$$

cioè la *suttangente* (§ 118) è *doppia della ascissa*: perciò senza ricorrere alla determinazione del foco *si conduce una tangente  $MT$  ad un punto  $M$  di una parabola, abbassando da  $M$  l'ordinata  $MP$ , e prendendo  $AT$  uguale all'ascissa  $AP$ , ovvero  $PT$  uguale a due volte  $AP$ .*

121. Ritenute le stesse considerazioni (§ 119), si conduca la  $MN$  normale (§ 118) alla *tangente*  $MT$  (fig. 77) ossia alla pa-

rabola nel punto **M**. È chiaro che il quadrilatero **MRFN** è un parallelogrammo, ed il lato **NF** è uguale al suo opposto **MR**; ma la distanza **MR** è uguale al raggio vettore **MF** (§ 446), dunque  $NF = MF$ . Perciò per condurre una normale ad un punto **M** preso sulla parabola si tira il raggio vettore **MF**, questo si riporta da **F** in **N**, e si uniscono i punti **N** ed **M** con la retta **MN** che sarà la normale richiesta.

422. Ora dal triangolo **NMT** rettangolo nel punto **M** si rileva che  $NP : MP :: MP : PT$ ; ma abbiamo trovato che la suttangente  $PT = 2AP$  dunque sarà

$$(1) \quad NP : MP :: MP : 2AP ;$$

inoltre il parametro  $p$  essendo terzo proporzionale dopo l'ascissa e l'ordinata (§ 444) avremo

$$(2) \quad p : MP :: MP : AP$$

e confrontando le proporzioni (1) e (2) si otterrà la

$$(3) \quad NP : p :: AP : 2AP :: 1 : 2$$

d'onde si rileva che la sunnormale (§ 448) è costante, ed è uguale alla metà del parametro. Perciò essendo cogniti l'asse ed il parametro, per condurre la normale ad un punto **M** della parabola si abbassa l'ordinata **MP**, si prende **PN** uguale alla metà del parametro, e quindi si tira **MN**, che sarà la normale richiesta.

423. Se il condurre la tangente e la normale ad un punto qualunque preso sulla curva parabolica occorre frequentemente, ed è importante nella pratica delle arti, non è senza utilità in qualche caso saper dagli artisti condurle da un punto dato fuori della medesima. La circonferenza del circolo descritta col centro nel punto **B** preso fuori della curva (fig. 78), e col raggio uguale alla distanza **FB** taglia la direttrice in due punti distinti **R**, **R'**. Dalle considerazioni che abbiamo fatte al (§ 449) si argomenta chiaramente che le perpendicolari condotte rispettiva-

mente alle corde  $FR$ ,  $FR'$  prolungate debbono esser tangenti alla curva. Inoltre se dai punti d'intersezione  $R$ ,  $R'$  si elevano le perpendicolari  $RM$ ,  $R'M'$  queste incontreranno rispet-



Fig. 78.

tivamente le tangenti nei punti  $M$ ,  $M'$ ; ma i punti  $M$ ,  $M'$  essendo ugualmente distanti dal foco e dalla direttrice (§ 116) appartengono altresì alla curva; Dunque i punti  $M$ ,  $M'$  sono quelli di contatto delle tangenti  $BM$ ,  $BM'$ . Perciò da un punto dato  $B$  fuori della parabola si possono condurre due tangenti distinte  $BM$ ,  $BM'$ ; le quali si determinano segnando sulla di-

rettrice le intersezioni  $R$ ,  $R'$  di un arco  $RFR'$  di centro  $B$  e di raggio  $FB$ , e quindi elevando da  $R$ ,  $R'$  le perpendicolari  $RM$ ,  $R'M'$  fino all'incontro della curva in  $M$ ,  $M'$ , e tirando infine le  $BM$ ,  $BM'$ .

124. Adesso da un punto  $R$  (fig. 79), preso esternamente alla



Fig. 79.

curva sul prolungamento della normale  $MN$ , condotta ad un punto  $M$ , si abbassi sull'asse la perpendicolare  $RB$ , e si porti dal piede  $B$  in  $O$  la metà del parametro, quindi sulla metà di  $AO$  si elevi la perpendicolare  $DC$  uguale al quarto di  $RB$ ; Dal punto  $M$  poi si tiri l'ordi-

nata  $MP$ , e da  $C$  la  $CS$  parallela all'asse. Siccome

$$CS = DP = AP - AD$$

$$MS = MP - SP = MP - CD.$$

Dal triangolo  $MOS$  rettangolo in  $S$  avremo

$$\overline{CM}^2 = \overline{CS}^2 + \overline{MS}^2 = (\overline{AP} - \overline{AD})^2 + (\overline{MP} - \overline{CD})^2$$

ovvero sostituendo gli equivalenti dei quadrati delle differenze avremo

$$\overline{CM}^2 = \overline{AP}^2 - 2 \overline{AD} \cdot \overline{AP} + \overline{AD}^2 + \overline{MP}^2 - 2 \overline{CD} \cdot \overline{MP} + \overline{CD}^2$$

ed essendo (§ 122)

$$2 \cdot \overline{AD} = \overline{AO} = \overline{AB} + \overline{BO} = \overline{AB} + \overline{PN}$$

$$2 \cdot \overline{CD} = \frac{2\overline{BR}}{4} = \frac{\overline{BR}}{2}, \text{ sostituendo avremo}$$

$$(1) \overline{CM}^2 = \overline{AP}^2 - \overline{AP} (\overline{AB} + \overline{PN}) + \overline{AD}^2 + \overline{MP}^2 - \frac{\overline{BR} \cdot \overline{MP} + \overline{CD}^2}{2}$$

Ciò posto, i triangoli simili BRN PMN danno  $\overline{BR} : \overline{MP} :: \overline{BN} : \overline{PN}$ , da cui si ottiene l'uguaglianza  $\overline{BR} = \frac{\overline{BN} \cdot \overline{MP}}{\overline{PN}}$ , che moltiplicata

da ambe le parti per  $\frac{\overline{MP}}{2}$  diviene

$$(2) \frac{\overline{BR} \cdot \overline{MP}}{2} = \frac{\overline{BN} \cdot \overline{MP}^2}{2 \cdot \overline{PN}}$$

poichè  $\overline{BN} = \overline{BP} + \overline{PN} = \overline{AP} - \overline{AB} + \overline{PN}$ ,

e pel (§ 114)  $\frac{\overline{MP}^2}{2\overline{PN}} = \overline{AP}$

ponendo nella (2) questi equivalenti avremo

$$(3) \frac{\overline{BR} \cdot \overline{MP}}{2} = (\overline{AP} - \overline{AB} + \overline{PN}) \overline{AP};$$

perciò nella uguaglianza (1) sostituendo la nuova espressione (3) ed eseguendo le moltiplicazioni e le riduzioni, otterremo

$$\overline{CM}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$$

Ma dal triangolo rettangolo ADC abbiamo

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$$

Dunque  $CM^2 = AC^2$  ovvero  $CM = AC$  cioè il punto di incontro  $M$  è distante dal punto  $C$  egualmente che il vertice  $A$  ed il punto  $O$ . Da ciò si apprende che *per condurre la normale  $RM$  alla parabola di noto parametro da un punto  $R$  preso fuori della curva, si abbassa la perpendicolare  $RB$ , si porta la metà del parametro da  $B$  in  $O$ , e sul mezzo di  $AO$  si conduce la perpendicolare  $DC$  uguale al quarto di  $RB$ , e quindi descritta una circonferenza col raggio  $AC$  e col centro in  $C$ , pel punto  $M$  ove essa interseca la parabola una seconda volta e pel punto dato  $R$  si tira la  $MR$ , che sarà la normale cercata.*

425. All'architettura è necessario nella costruzione degli archi e delle volte di determinare la direzione delle superficie di commesso dei cunei, che per le leggi della Statica deve essere perpendicolare alla curva delle centine. Quando si voglia specialmente costruire un arco o una volta parabolica, piuttosto che impiegare i metodi generali già indicati (§ 33), il costruttore opererà con più facilità e brevità e conseguirà maggiore esattezza applicando le semplici regole ora esposte, che insegnano a

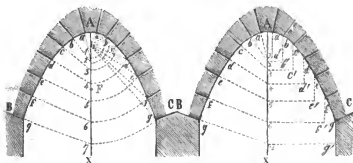


Fig. 80.

Fig. 81.

condurre la normale o la tangente alla parabola. Per esempio; se  $BAC$  (fig. 80) è la curva parabolica di un arco o di una volta, condotto l'asse  $AX$  e determinato il fuoco  $F$ , a partire dal ver-

tice  $A$  si prendano gli archi  $Aa, ab, bc, cd, ec.$ , corrispondenti alla larghezza dei cunei. Per la regola del (§ 121) gli archi  $a1, b2, c3, d4$  ec., che si descrivono coi raggi vettori  $Fa, Fb, Fc, Fd, ec.$ , taglieranno l'asse  $AX$  nei punti  $1, 2, 3, 4, 5$  ec., e le rette  $1a, 2b, 3c, 4d$  ec., che gli uniscono ai punti  $a, b, c, d, ec.$  saranno rispettivamente le normali alla curva in questi punti, e quindi daranno le direzioni secondo le quali debbono disporsi le superficie di contatto dei cunei. Per la regola poi del (§ 122) si conducano dai punti  $a, b, c, d, ec.$  (*fig. 81*), le  $aa', bb', cc', dd', ec.$  parallele all'asse  $AX$  ed uguali costantemente alla metà del parametro, ossia al doppio di  $AF$ , e dai punti  $a', b', c', d', ec.$ , altrettante perpendicolari all'asse  $a'1, b'2, c'3, d'4, ec.$ , che lo incontreranno nei punti  $1, 2, 3, 4, ec.$ , e finalmente si tirino le rette  $1a, 2b, 3c, 4d, ec.$ , che saranno le normali o le direzioni richieste. <sup>1</sup>

**Proprietà Usata.** — 126. Prolungando il raggio vettore  $FM$ , la normale  $NM$  e la tangente  $TM$  nella parte esterna della parabola (*fig. 82*) rispettivamente in  $f$ , in  $n$ , e in  $t$ , e la perpendicolare  $RM$  nella parte interna fino in  $r$ , abbiamo una serie di angoli opposti al vertice, che ci danno manifestamente

$$\text{ang. } rMf = \text{ang. } TMF$$

$$\text{ang. } fMt = \text{ang. } TMR,$$

ma i complementi d'angoli uguali sono uguali; dunque



Fig. 82

<sup>1</sup> Quando all'architetto piacesse di segnare gli archi  $Aa, ab, bc, cd, ec.$ , sulla curva esterna ossia di *estradosso* della volta, allora si presenta il caso di condurre altrettante normali alla curva interna o di *intradosso* da punti situati fuori di lei, e può essere applicabile la regola del (§ 121). Nella esecuzione, pratica delle volte si è costretti ad operare sulla parte esterna delle centine, il che impedisce di riportare in natura le costruzioni grafiche o le misure che da esse dipen-



ang.  $rMN = \text{ang. } NMF$

ang.  $fMn = \text{ang. } nMR$ .

È siccome sappiamo dalla fisica che l'angolo di incidenza è uguale all'angolo di riflessione, per ciò: 1° *I raggi della luce, del calore e del suono paralleli all'asse incontrando la concavità della parabola convergono tutti, e si riflettono nei raggi vettori nel fuoco F; viceversa partendo dal fuoco F si riflettono parallelamente all'asse.* 2° *I raggi stessi paralleli all'asse incontrando la convessità divergono fra loro, e si riflettono secondo il prolungamento dei raggi vettori; e viceversa diretti al fuoco si riflettono parallelamente all'asse.*

427. Nelle arti fisiche si fa frequente applicazione di queste proprietà, ed in seguito ne daremo qualche esempio parlando delle superficie di rivoluzione generate dalla parabola: intanto non è fuor di luogo l'indicare come se ne valga l'arte di edificare. Per esempio: dalla domestica economia si richiede che il cammino di una camera produca il riscaldamento dell'ambiente col minor consumo di combustibile. A tal fine il buon costruttore dando alla parete del cammino la forma parabolica coll'asse diretto verso la camera, otterrà che i raggi calorifici, emanati dalla fiamma posta nel fuoco della parabola, incontrando la parete del cammino, si riflettano parallelamente all'asse, e così senza disperdersi, vengano tutti lanciati direttamente nella camera a riscaldarne l'ambiente.

Una sala destinata a raccogliere più persone per ascoltare un oratore, come una scola o un foro, per esser perfetta si co-

dono. In tal caso si stabiliranno una linea materiale che rappresenti l'asse prolungato esternamente, e tante linee o corde che rappresentino le tangenti (§ 420), quindi ponendo successivamente una squadra con un lato lungo le tangenti e col vertice dell'angolo retto in ciascun punto cui deve corrispondere la linea di contatto dei cunei, l'altro lato della squadra darà la direzione delle rispettive normali.

struirà con una mezza circonferenza BDC (fig. 83) e con una porzione BAC di parabola, la quale abbia il fuoco F nel centro stesso della circonferenza. Colui che parla essendo collocato nel centro F, i suoni della sua voce giungono direttamente agli udi-



Fig. 83

tori secondo i raggi del semicerchio, e vi giungono riflessi parallelamente a se stessi dalla parete parabolica BAC; così non ne va perduto alcuno, e dietro l'oratore resta meno spazio che se la sala fosse totalmente circolare.

Nella costruzione dei Teatri si deve prescegliere quella figura che combini possibilmente la maggior riunione dei raggi *sonori* onde riescano sonori. La parabola soddisfacendo meglio d'ogni altra curva a questa condizione, l'architetto la impiegherà di preferenza, costruendo le pareti secondo i rami di una parabola, ponendo il fuoco nel mezzo del proscenio, e chiudendoli dalla parte verso la quale divergono da una curva convenientemente scelta e combinata.

## LEZIONE SETTIMA.

*Diametri. — Determinazione degli elementi parabolici. —  
Descrizione e costruzione della parabola.*

**Diametri.** — 428. Ogni retta indefinita  $A'X'$  che si conduca da un punto qualunque  $A'$  della parabola (*fig. 84*) parallelamente all'asse principale  $AX$  si chiama *diametro*. L'asse principale stesso è un diametro, che divide simmetricamente la curva (§§ 99, 100). Seda qualsivoglia punto  $P'$  del diametro si conduce la  $P'M'$  parallela alla  $A'T$  tangente nel punto  $A'$ , le  $A'P'$ ,  $M'P'$  si dicono rispettivamente *ordinata ed ascissa al diametro* dal punto  $M'$  (§ 60). Molte delle proprietà della parabola che si riferiscono all'asse principale si verificano anco rispetto ai diametri.



Fig. 84.

Siccome esse interessano più il Geometra che l'Arte, esporremo unicamente quelle che possono nella pratica trovare una diretta ed utile applicazione.

429. Nella parabola  $MAm$  (*fig. 85*) si conduca una corda qualunque  $Mm$  parallela alla retta  $aT$  tangente in un punto  $a$ , e si prolunghi il diametro  $ax$  condotto per  $a$  fino al punto di incontro  $d$  colla direttrice  $Rr$ , e dai punti estremi  $M, m$  della corda si abbassino sulla direttrice le perpendicolari  $MR, mr$ , che saranno parallele fra loro e rispettivamente uguali ai raggi vettori  $MF, mF$  (§ 116), e dipoi pel punto  $d$  e pel fuoco  $F$  si tiri

la retta  $dG$ , che taglierà le parallele  $aT$ ,  $Mm$  nei punti  $C$  ed  $O$ , e sarà ad esse perpendicolare, poichè la distanza  $ad$  uguaglia il raggio vettore  $aF$ ; finalmente fatto centro in  $M$  col raggio  $MF$



Fig. 85.

si descriva un arco di cerchio  $RFM$ , il quale sarà tangente alla direttrice nel punto  $R$ , e taglierà nuovamente la retta  $dG$  nel punto  $G$ . Inoltre essendo  $Mm$  perpendicolare ad  $FG$  ed  $MF = MG$ , il punto  $m$  sarà ad egual distanza dal punto  $G$ , dal fuoco  $F$ , e dalla direttrice (§ 416); perciò l'arco descritto col centro in  $m$  e col raggio  $mF$  sarà pure tangente alla direttrice in  $r$ .

Ora la direttrice  $Rr$  è tangente comune agli archi descritti nei punti  $R$ ,  $r$ , ed i punti  $F$ ,  $G$  appartenendo ad ambedue gli archi, la retta  $dG$  è secante comune nei medesimi punti  $F$ ,  $G$ ; per cui avremo

$$dF : Rd :: Rd : Gd$$

$$dF : dr :: dr : Gd, \quad 1$$

le quali paragonate danno  $Rd = dr$ ; ma per le parallele  $MR$ ,  $Pd$ ,  $mr$  che tagliano la direttrice  $Rr$  e la corda  $Mm$  abbiamo

$$Rd : dr :: MP : Pm; \quad \text{dunque } MP = Pm$$

*cioè ogni corda parallela alla tangente in un punto della parabola, è divisa in due parti uguali dal diametro condotto dal medesimo punto.*

130. Questa proprietà è utilissima per determinare tutte le

<sup>1</sup> Nelle nostre lezioni di geometria elementare abbiamo dimostrato che da un punto dato fuori di un circolo condotta una tangente ed una secante, la tangente è media proporzionale fra l'intera secante e la parte esterna.

funzioni lineari della parabola, per cui credo giovare all'arte del disegnare specialmente esponendo il seguente

437 PROBLEMA. *Data una parabola NAS (fig. 86) trovarne l'asse, il vertice, il parametro, la direttrice ed il fuoco.* Condotte comunque



Fig. 86.

e divise in mezzo nei punti  $p, q$  due corde parallele  $Mm, Nn$ , pei  $p, q$  si tiri  $BC$  che sarà il *diametro*. Perpendicolarmente a questo si conduca da  $M$  la corda  $MS$ , e dal suo punto di mezzo  $P$  si tiri  $AO$  parallela a  $BC$ , che sarà l'*asse principale*.

Il punto di incontro  $A$  con la curva sarà il *vertice*. Descritta una mezza circonferenza  $AMO$  che passi per  $A$  ed  $M$  col centro sull'asse, il segmento  $PO$  sarà il

*parametro*. Presa  $AD$  uguale al quarto di  $PO$ , la  $DR$  condotta perpendicolarmente ad  $AO$  sarà la *direttrice*; ed in fine il punto  $F$  segnato da  $A$  in  $F$  parimente col quarto di  $PO$  sarà il *fuoco*.



Fig. 87.

All'esercizio degli studiosi rilasciamo di trovare nelle proprietà fin qui esposte le ragioni di questo operato.

431. Se dalle estremità  $M, m$  della corda  $Mm$  (fig. 87) si conducono alla parabola due tangenti  $MT, mT$ , ciascuna incontrerà il prolungamento del diametro  $AP$  che divide in mezzo la corda stessa; ma è dimostrato dalla geometria analitica che l'ascissa  $AP$  è uguale alla parte esterna del

diametro compresa fra la curva e l'incontro della tangente; <sup>1</sup>

<sup>1</sup> Ecco un modo elementare per giungere alla dimostrazione di questa proposizione. Primieramente dai triangoli simili  $TCF, FOn$  (fig. 85) § 429) si ha  $FT : FC :: Fn : FO$  dalla quale componendo

Dunque, poichè i punti  $M, m$  hanno la medesima ascissa  $AP$ , le tangenti  $MT, mT$  incontrano il diametro nello stesso punto  $T$  e

$$\text{avremo} \quad FT : FC :: FT + Fn : FC + FO :: Tn : CO$$

$$\text{ma i triangoli simili } TCF, FDd \quad \text{danno } Fd : FD :: FT : FC$$

$$\text{dunque } Fd : FD :: Tn : CO$$

$$\text{ovvero} \quad (1) \quad Fd : 2FD :: Tn : 2CO.$$

Inoltre essendo

$$CO = CF + FO = dC + OG \quad \text{sarà} \quad 2CO = CF + FO + dC + OG = dG$$

e per le parallele  $aT, PO$  sarà  $Tn = aP$ , quindi la (1) si riduce

$$Fd : 2FD :: aP : dG;$$

ma rispetto alla secante  $dG$  ed alla tangente  $Rd$  dell'arco  $RG$  abbiamo trovato (§ 429)  $Fd : Rd :: Rd : dG$  ossia, per essere  $Rd = Mx$ ,

$$Fd : Mx :: Mx : dG.$$

$$\text{Dunque} \quad 2FD : Mx :: Mx : aP$$

ed osservando che  $2FD$  uguaglia il parametro  $p$  (§§ 444, 445) avremo

$$(2) \quad \overline{Mx}^2 = p \cdot aP.$$

In secondo luogo considerando due ordinate  $Mp, Nq$  (fig. 86) al diametro  $BC$ , calate su di esso le perpendicolari  $Mr Ns$  avremo per

$$\text{la (2)} \quad \overline{Mr}^2 = p \cdot Bp, \quad \overline{Ns}^2 = p \cdot Bq \quad \text{colle quali si ottiene}$$

$$\overline{Mr}^2 : \overline{Ns}^2 :: Bp : Bq$$

ma i triangoli simili  $Mrp, Nsq$  danno  $Mr : Ns :: Mp : Nq$  che quadrando ogni suo termine diviene

$$\overline{Mr}^2 : \overline{Ns}^2 :: \overline{Mp}^2 : \overline{Nq}^2.$$

$$\text{Dunque} \quad (3) \quad \overline{Mp}^2 : \overline{Nq}^2 :: Bp : Bq$$

cioè i quadrati delle ordinate stanno come le ascisse, il che abbiamo veduto verificarsi rispetto all'asse (§ 412). Ora conducendo una se-

viceversa la retta TP che divide in parti uguali  $MP = Pm$  la corda  $Mm$  e che passa pel punto d'incontro T delle tangenti condotte da M,  $m$  è un diametro. Ciò premesso, da un punto C si conduca una terza tangente Nn e dai punti N, C,  $n$  si tirino i diametri NB, CD,  $nb$  paralleli a TP; le corde MC, Cm essendo parimente divise per metà dai diametri NB,  $nb$  danno  $MB = BD$ ,  $Db = bm$ , e perciò

$$MB + BP = MP = Pm = PD + Db + bm$$

ossia

$$MB + BP = PD + 2bm$$

cante SN (fig. 88) e dai punti M, N le ordinate  $Mp$ ,  $Nq$  al diametro Tq, i triangoli simili MSp, NSq daranno

$$Sp : Sq :: Mp : Nq:$$

ossia quadrando ogni termine, si avrà

$$\overline{Sp}^2 : \overline{Sq}^2 :: \overline{Mp}^2 : \overline{Nq}^2,$$

ed essendo

$$Sp = SB + Bp, Sq = SB + Bq,$$

e paragonando la proporzione (3) avremo

$$(SB + Bp)^2 : (SB + Bq)^2 :: Bp^2 : Bq^2$$

dalla quale si ottiene

$$(\overline{SB} + Bp)^2 \cdot Bq = (\overline{SB} + Bq)^2 \cdot Bp.$$

e riducendo avremo

$$\overline{SB}^2 (Bq - Bp) = Bq \cdot Bp (Bq - Bp).$$

D'onde (4)  $\overline{SB}^2 = Bq \cdot Bp$ ; cioè la parte esteriore del diametro compresa fra il vertice e la secante è media proporzionale fra le due ascisse. Supponendo finalmente che i punti M, N si avvicinino fra loro da coincidere in un sol punto  $m$ , la secante NS diverrà la tangente NT, e le ascisse  $Bp$ ,  $Bq$  diverranno uguali alla ascissa BR del punto di contatto  $m$ ; perciò la (4) si cangerà nella

$$\overline{TB}^2 \overline{SB}^2 = BR \times BR = \overline{BR}^2, \text{ e quindi } \overline{TB} \overline{SB} = BR.$$

Dunque  $\overline{SB} = \frac{\overline{TB}}{\overline{TB}} \overline{SB} = \overline{SB} + BR = 2BR$ , cioè la sotttangente è doppia della ascissa, come abbiamo trovato nell'asse principale (§ 120).

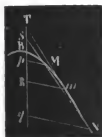


Fig. 88.

e poichè  $PD = BD - BP = MB - BP$   
 avremo  $MB + BP = MB - BP + 2bm$  cioè  $BP = bm$   
 e quindi sarà  $MB = BD = BP + PD = bm + PD$   
 ovvero  $MB = Db + PD$  cioè  $MB = Pb$ .

Ora le parallele NB, TP danno

$$MN : NT :: MB : BP;$$

e poichè abbian trovato

$$BP = bm, MB = Pb$$

avremo  $MN : NT :: Pb : bm;$

ma le parallele TP, nb danno  $Tn : nm :: Pb : bm;$  dunque stabiliremo

$$MN : NT :: Tn : nm,$$

*cioè le tangenti MT, mT condotte all'estremità M, m di una corda Mm sono divise da una terza tangente Nn in parti reciprocamente proporzionali.*

Molte altre proprietà vengono dimostrate dalla Geometria, le quali ci impegnerebbero in considerazioni troppo elevate e puramente speculative; però qui ci arresteremo per non allontanarci dallo scopo tecnologico di queste Lezioni.

#### **Determinazione degli elementi parabolici. —**

132. Dopo avere esposte nella passata e nella presente lezione quelle fra le proprietà della parabola, che abbiamo creduto possano ricevere una diretta ed utile applicazione, mostriamo adesso i diversi processi di costruzione grafica della curva da seguire nei differenti casi dell'esercizio delle arti. Gli oggetti, che cadono sotto i nostri sensi o si presentano alla nostra considerazione, in pratica hanno delle dimensioni necessariamente finite. La parabola sebbene estenda i suoi rami all'infinito (§ 100) e quindi comprenda superficie infinite, viene impiegata nelle arti entro certi limiti di estensione. Nella pratica dell'operare in sostanza non abbiamo che da costruire un arco di parabola limitato dalla corda, e l'artista conoscendo le proprietà diverse di questa



curva, non ha in conseguenza che da scegliere quella regola di costruzione, che meglio soddisfa alle condizioni imposte dallo scopo cui la curva è destinata.

133. Quando sieno dati soltanto una corda e l'asse principale dell'arco parabolico da costruire, il problema è indeterminato: imperocchè per due punti può passare un numero infinito di parabole. Per condurre l'unico arco parabolico che insista sopra una corda o linea qualunque finita, è necessario sia dato il fuoco, o la direttrice, o il vertice colla direzione dell'asse, ossia la tangente al vertice. Vediamo prima di tutto come colla cognizione di uno di questi elementi si possano determinare gli altri due.

134. PROBLEMA PRIMO. *Dati due punti M, m ed il fuoco F di una parabola (fig. 89), determinare la direttrice, ed il vertice all'asse.* Coi raggi vettori MF, mF fatto centro in M ed m si



Fig. 89.

descrivano due circonferenze RFR', rFr', dipoi si conduca una tangente Rr comune alle due circonferenze, ed infine si tiri pel punto F la DX perpendicolare ad Rr, e si divida l'intervallo FD per metà. Poichè i raggi MR, mr perpendicolari alla tangente Rr sono

rispettivamente uguali ai raggi vettori MF, mF, ciascuno dei punti M, m è ugualmente distante dal fuoco F e dalla tangente Rr, perciò (§ 116) la Rr è la direttrice, ed in conseguenza la perpendicolare DX, e il punto di mezzo A di DF sono l'asse principale ed il vertice (§ 115). Siccome dalla geometria elementare sappiamo di poter condurre due tangenti alle circonferenze RFR', rFr', il problema ha una doppia soluzione: infatti la seconda tangente R'r' sarà parimente una direttrice, la D'X', che pel fuoco F scende perpendicolarmente su di essa, il suo asse principale, ed il



retta  $Tt$ ; poichè l'asse è perpendicolare alla tangente al vertice,  $CB$  sarà il diametro e le  $MT, mt$  uguaglieranno le ascisse all'asse dei punti  $M, m$ . Si porti  $MT$ , da  $B$  in  $Q$  ed  $mt$  da  $B$  in  $q$ , e sulla porzione  $Qq$  come diametro si descriva la semicirconferenza  $QNq$  che taglierà il diametro  $BC$  della parabola in  $N$ ; da  $N$  si conduca  $NO$  parallela a  $Tt$  e dal punto di incontro  $O$  con la corda  $Mm$  si faccia passare  $AP$  parallela a  $BC$ . La parallela  $AP$  è l'asse principale, e il punto d'intersezione  $A$  il vertice. Infatti abbiamo per costruzione

$$QB : BN :: BN : Bq;$$

ma  $BN = AO$ , e condotte le perpendicolari  $MP, mp$  sopra la direzione  $AO$  si ha

$$BQ = MT = AP, Bq = mt = Ap;$$

Dunque avremo  $AP : AO :: AO : Ap$ , con che resta verificata la prima delle proprietà della parabola, che abbiamo trovata al (§ 417), relativamente ai punti  $M, m, A$ , pei quali deve passare la curva. Il problema poi del (§ 431) insegnerà a trovare il parametro e quindi il fuoco e la direttrice.

437. L'architettura può trovarsi al caso di risolvere gli esposti problemi nella costruzione della centina per gli archi *zoppi* o *rampanti* di forma parabolica. In queste costruzioni la posizione dei punti  $M, m$  è data dalle *imposte* dell'arco, la di cui corda è inclinata all'orizzonte; e piuttosto che il fuoco o la direttrice, ordinariamente è data per condizione l'altezza massima a cui deve elevarsi l'arco parabolico sopra l'orizzontale condotta per una delle imposte, ossia è data la tangente al vertice della parabola; e per conseguenza è più frequente il caso di avere a risolvere l'ultimo che i precedenti problemi. Premesse queste considerazioni sulla costruzione di un arco parabolico, scendiamo ad esporre le varie regole, colle quali graficamente si può descrivere la parabola.

**Descrizione e costruzione della parabola.** — 138 METODO DELLE ORDINATE. *Descrivere la parabola dati l'asse AF, il vertice A ed un punto qualunque M (fig. 92).*

*Regola prima.* Determinato il parametro PR con la posizione del punto M (§§ 114, 130), si

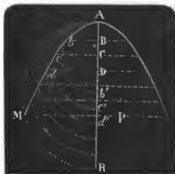


Fig. 92

fa centro successivamente sull'asse, e si descrivono le semicirconferenze  $Abb'$ ,  $Acc'$ ,  $Add'$  ec., concorrenti nel vertice A, che taglieranno l'asse nei punti  $b'$ ,  $c'$ ,  $d'$ , ec.; si prendono i segmenti  $b'B$ ,  $c'C$ ,  $d'D$ , ec., uguali al parametro PR, e dipoi dai punti B, C, D ec.; così determinati si conducono le ordinate  $Bb$ ,  $Cc$ ,  $Dd$  ec.; i punti

$b$ ,  $c$ ,  $d$ , ec., ove esse incontrano le rispettive semicirconferenze  $Abb'$ ,  $Acc'$ ,  $Add'$  ec., apparterranno alla parabola, poiché le ordinate  $bB$ ,  $cC$ ,  $dD$  ec., essendo i segmenti  $b'B$ ,  $c'C$ ,  $d'D$  ec. uguali e costanti, hanno i quadrati loro proporzionali ai segmenti o ascisse AB, AC, AD ec. (§§ 112, 114); e non rimarrà finalmente che unire con una linea i punti A,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , .... M secondo il grado di continuità richiesto dall'uso a cui deve servire la curva (§ 62 al 68). Siccome i rami della curva sono uguali e simmetrici intorno all'asse (§ 400), per costruire l'altro ramo della parabola si ripeterà la regola rovesciando l'operazione in senso contrario, ovvero raddoppiando le ordinate  $Bb$ ,  $Cc$ ,  $Dd$  ec. Alla medesima determinazione si giunge applicando lo stesso principio (§ 112) con la seguente

*Regola seconda.* Dal vertice A (fig. 93) si conduce la  $Am$  perpendicolare all'asse, ed il parametro già determinato si riporta sulla parte esterna dell'asse da A in R, e quindi facendo centro successivamente sull'asse si descrivono le semi-

circonferenze  $R\prime B$ ,  $R\prime C$ ,  $R\prime D$  . . . . .  $RmP$  concorrenti nel punto  $R$ , le quali taglieranno l'asse in  $B$ ,  $C$ ,  $D$  . . . .  $P$ ,



Fig. 98.

e la perpendicolare  $Am$  in  $\prime b$ ,  $\prime c$ ,  $\prime d$  . . . . .  $m$ . Dai punti  $B$ ,  $C$ ,  $D$  . . . .  $P$  conducendo le  $Bb$ ,  $Cc$ ,  $Dd$  . . . .  $PM$  parallele alla  $Am$ , e dai punti  $\prime b$ ,  $\prime c$ ,  $\prime d$  . . . .  $m$  le  $\prime b$ ,  $\prime c$ ,  $\prime d$  . . . .  $mM$  parallele all'asse, i punti di loro incontro  $b$ ,  $c$ ,  $d$  . . . . .  $M$  apparterranno alla parabola, poichè essendo le  $A\prime b$ ,  $A\prime c$ ,  $A\prime d$  . . . .  $Am$  uguali rispettiva-

mente alle  $Bb$ ,  $Cc$ ,  $Dd$  . . . .  $PM$  come nella regola precedente, si verifica la proprietà che i quadrati delle ordinate  $bB$ ,  $cC$ ,  $dD$  . . . .  $MP$  stanno come i segmenti, o le ascisse  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$ , . . . . ,  $AP$  (112, 114).



Fig. 94.

### 139. METODO DEI RAGGI VETTORI.

*Descrivere la parabola dato il fuoco  $F$ , e la direttrice  $D'R$  (fig. 94).* Sulla direttrice  $D'R$  si prendono a piacere i punti  $\prime b$ ,  $\prime c$ ,  $\prime d$ , ec., dal fuoco  $F$  si tirano le rette  $F\prime b$ ,  $F\prime c$ ,  $F\prime d$  ec., e sulla metà di ciascuna si elevano le perpendicolari  $b1$ ,  $c2$ ,  $d3$ , ec.; dipoi condotta per  $F$  la  $D'X$  perpendicolare a  $D'R$ , dai punti  $\prime b$ ,  $\prime c$ ,  $\prime d$  ec. si conducono le  $\prime b$ ,  $\prime c$ ,  $\prime d$  ec., parallele a  $D'X$  fino che incontrano le rette  $b1$ ,  $c2$ ,  $d3$ , ec., nei punti  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , ec. Questi appartengono

alla parabola richiesta di cui il punto di mezzo  $A$  della  $FD$  ne è il vertice: infatti i punti  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , ec., trovandosi situati si-

multaneamente sopra le perpendicolari  $b1$ ,  $c2$ ,  $d3$  ec., e sulle parallele  $U' b$ ,  $c' c$ ,  $d' d$  ec., godono della notevole proprietà della parabola di essere ugualmente distanti dal fuoco  $F$  e dalla direttrice  $D'R$  (§ 416). Con analoga operazione si potranno determinare i punti dell'altro ramo simmetrico della parabola, e quindi si uniranno per aver la curva continua nei modi che abbiamo altrove insegnato (§ 62, al 68). Siccome le perpendicolari  $b1$ ,  $c2$ ,  $d3$  ec., sono le tangenti ai punti  $b$ ,  $c$ ,  $d$  ec., e le  $bB$ ,  $cC$ ,  $dD$ , ec., parallele ed uguali alle  $Fb'$ ,  $Fc'$ ,  $Fd'$ , ec., sono le normali ai punti medesimi (§ 418, 421), la regola istessa risparmia la costruzione delle une e delle altre, e può usarsi quando sieno richieste, ma non dà risultati troppo esatti perchè la crescente obliquità delle perpendicolari  $b1$ ,  $c2$ ,  $d3$ , ec., sulle  $bU'$ ,  $c' c'$ ,  $d' d'$ , ec., rende più incerta la vera posizione del punto d'intersezione. Con più esattezza e semplicità si determineranno i punti  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , ec., se condotto per  $F$  l'asse  $AX$  (fig. 95) su di esso si prendono a piacere le ordinate indefinite  $bB$ ,  $cC$ ,  $dD$ , ec., e quindi facendo centro in  $F$  coi raggi successivamente uguali a  $D'B$ ,  $D'C$ ,  $D'D$  ec., si descrivano altrettanti archi da tagliare le rispettive ordinate nei punti  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , ec., che saranno quelli richiesti, poichè godono parimente della medesima proprietà (§ 416).



Fig. 95.

I metodi esposti si applicano senza difficoltà nelle operazioni ove si può maneggiare la riga ed il compasso, ma non convengono nelle costruzioni in grandi dimensioni, per le quali è più facile e resta più semplice il seguente

**440. METODO DELLE CORDE.** *Descrivere la parabola, dato il vertice  $A$  coll'asse  $AP$  ed un punto qualunque  $M$  (fig. 96). Dal punto  $M$  si conduca sull'asse  $AP$  la doppia ordinata  $Mm$ , che darà un secondo punto  $m$  della parabola. Si divida l'ascissa*

AP e le ordinate MP, mP nel medesimo numero di parti uguali, e si numerino le divisioni di AP dal vertice A verso P, e quelle di MP, mP viceversa dal piede P verso i punti M, m;

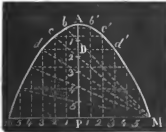


Fig. 96.

Infine dal punto M e pei punti 1, 2, 3 ec. della ascissa AP si tirino altrettante rette, che taglieranno nei punti b, c, d, ec. le parallele indefinite condotte all'asse dai punti corrispondenti della ordinata mP. I punti b, c, d, ec. apparterranno alla parabola, e per ottenere i loro sim-

metrici b', c', d', ec. si farà per m ciò che è stato fatto per M; o per abbreviare l'operazione, sull'è rette che partono da m si riporteranno le porzioni 1b, 2c, 3d ec. da 1 in b', da 2 in c', da 3 in d' e così di seguito.

Infatti se consideriamo, per esempio, il punto d, si conduca l'ordinata dD, ed osservando che il segmento P3 dell'ordinata mP è uguale all'ordinata dD, dietro il metodo tenuto nella costruzione avremo

$$MP : Dd :: 6 : 3$$

$$AP : A3 :: 6 : 3$$

perciò avremo

$$MP : Dd :: AP : A3.$$

Ma fra le proprietà della parabola abbiamo trovato che l'ordinata maggiore condotta dall'estremità di una corda sta alla minore condotta all'altra estremità come l'ascissa maggiore sta all'asse intercetto fra il vertice e la corda (§ 117, e nota 1); dunque il punto d deve necessariamente appartenere alla parabola, ed in conseguenza per la stessa ragione vi apparterranno gli altri punti b, c, ec.

144. METODO DELLE TANGENTI. *Descrivere una parabola, date due tangenti MT, M'T, ed i loro contatti M, M' (fig. 97).* Per rendere l'operazione più generale si supponga che le tangenti si

tagliano sotto un angolo  $MTM'$  qualunque. Le porzioni  $MT, M'T$  di esse intercette fra i punti di contatto  $M, M'$  ed il punto d'incontro  $T$  si dividano nel medesimo numero di parti uguali, per esempio in 8. Numerati progressivamente i punti di divisione dell'una  $MT$  a partire da  $M$  verso  $T$ , e quelli dell'altra  $M'T$  da  $T$  verso  $M'$ , si conducano pei punti contrassegnati del medesimo numero le rette  $1.1', 2.2', 3.3', \dots 7.7'$  ciascuna delle quali per conseguenza dividerà le  $MT, M'T$  in parti reciprocamente



Fig. 97.

proporzionali; ma due tangenti alla parabola tagliate da una terza godono di questa proprietà (§ 434). Dunque le rette  $1.1', 2.2', 3.3'$ , ec. saranno altrettante tangenti alla parabola richiesta, ed il contatto di ciascuna sarà il punto di mezzo della porzione di tangente compresa fra le tangenti vicine;<sup>1</sup> (§§ 428, 429, 431) così il punto  $b$  mezzo di  $mn$  sarà il contatto della tangente  $4.4'$ . Questo metodo si presta meglio del precedente per le operazioni in grande da eseguirsi sul terreno,

quando anche nella parte interna della parabola da tracciarsi

<sup>1</sup> Se consideriamo una qualunque delle tangenti, per esempio la  $7.7'$ , di cui il punto di contatto sarà il punto di mezzo  $ad$  di  $d7'$ , la successiva  $6.6'$  tagliandola in  $d$ , ed incontrando la  $MT$  in  $6$  darà  $ad : d7' :: 4 : 6$  e quindi  $ad = \frac{d7'}{6}$ ; l'altra poi  $5.5'$  darà  $ac : c7' :: 2 : 3$  cioè  $ac = \frac{2c7'}{5}$  ma  $ac = ad + dc$ ,  $c7' = d7' - dc$ . Dunque sostituendo avremo  $5(ad + dc) = 42ad - 2dc$  d'onde  $ad = dc$ ; ed operando così di seguito per le tangenti  $4.4', 3.3'$  ec., troveremo  $dc = ce$ ,  $ce = cf$ , ec., cioè la tangente  $7.7'$  rimane divisa nel medesimo numero di parti uguali in cui furono divise le  $MT, M'T$ , come in un mozzo analogo può dimostrarsi di tutte le altre. Da queste proprietà della parabola si rileva un processo generale per dividere una retta data in un numero di





collo stesso numero sono sulla parabola richiesta. Questo metodo di costruzione è fondato sopra la proprietà della parabola di avere la parte esterna del diametro intercetta fra il vertice e una secante media proporzionale fra le due ascisse (§ 131, nota 1), che non abbiamo dimostrata, perchè un poco superiore all'elementarità di queste Lezioni. <sup>4</sup>

143. I metodi esposti possono esser applicati con più o meno convenienza ai diversi casi in cui le arti fisiche, l'Architettura e la Geodesia debbono costruire la parabola. Nelle costruzioni delle strade e dei canali all'angolo formato da due andamenti rettilinei, onde il cambiar direzione non riesca maleagevole e pericoloso alle vetture ed ai battelli, si sostituisce ordinariamente una curva, alla di cui costruzione sono unicamente applicabili i metodi delle tangenti e delle secanti. La regolarità della risvolta richiede che la curva di unione sia tangente ad ambedue i lati dell'angolo. Quando i punti di contatto

<sup>4</sup> Alla nota 1 però del (§ 131) ne abbiamo data la dimostrazione, e qui vediamo come questa proprietà si applichi al metodo esposto delle secanti. Da un punto *b* qualunque fra i determinati (fig. 99) condotta al diametro TP l'ordinata *bp*, dai triangoli simili *Spb*, *SPm*, e da *Opb*, *OPM* avremo

$$\begin{aligned} MP & : pb :: SP : Sp \\ MP & : pb :: OP : Op, \end{aligned}$$

che moltiplicate insieme daranno

$$\overline{MP}^2 : \overline{pb}^2 :: SP \times OP : Sp \times Op :: (AP + AS)(AP - AO) : (Ap + AS)(AO - Ap). \\ \text{Ma } \overline{MP}^2 : \overline{pb}^2 :: AP : Ap, \text{ e } AO = AS. \text{ Dunque sostituendo e sviluppando avremo}$$

$$AP : Ap :: (\overline{AP}^2 - \overline{AS}^2) : (\overline{AS}^2 - \overline{Ap}^2)$$

$$\text{d'onde} \quad AP (\overline{AS}^2 - \overline{Ap}^2) = Ap (\overline{AP}^2 - \overline{AS}^2)$$

da cui finalmente avremo  $\overline{AS}^2 = AP \cdot Ap$ . Dunque verificandosi che la parte esteriore *AS* è media proporzionale fra le ascisse, il punto *b* è necessariamente sulla parabola, come lo saranno gli altri, potendosi per essi dimostrare altrettanto.

sono ugualmente distanti dal vertice, si impiega spesso un arco di circolo; ma quando il circolo non fosse facile a descriversi sul terreno per la grandezza del raggio, o quando la posizione topografica degli oggetti circostanti all'angolo non permettesse che i contatti della curva si trovassero alla stessa distanza dal vertice, si può impiegare un arco di parabola di preferenza alle altre curve, sia per la uniformità della sua curvatura, sia per la facilità di tracciarlo per allineamenti.

---

## LEZIONE OTTAVA

*Compassi parabolici. — Misura della parabola. — Paraboloide. — Misura del Paraboloide.*

**Compassi parabolici.** — 144. Alla costruzione della parabola si può procedere meccanicamente, cioè impiegando degli stromenti o meccanismi, i quali eseguiscono i metodi e le regole insegnate a seconda delle proprietà dimostrate. Questi stromenti si chiamano *compassi parabolici*. Noi ci limiteremo a dare

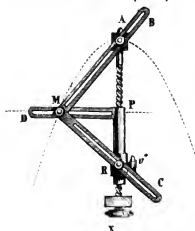


Fig. 100.

una semplice idea del loro principale organismo, rilasciando allo studio degli artisti l'immaginare e costruire dei veri e propri stromenti.

Si supponga una verga o asse rigido  $AX$  (fig. 100) che sostenga in una estremità un pernio fisso  $A$ . Il lato  $PR$  di una squadra  $RPD$  porti un pernio  $R$  da fissarsi su di esso con una vite di pressione  $v$  ad una distanza a piacimento dal vertice  $P$ , e possa scorrere lungo l'asse  $AX$  per mezzo di un meccanismo qualunque, per esempio facendo girare la vite intagliata sull'asse  $AX$  ad incastro

dentro il lato medesimo, e l'altro lato PD abbia un canale rettilineo. Nei lati MC, MB di una seconda squadra BMC sieno pure praticati due canali, e nel vertice  $\sphericalangle$  dell'angolo retto sia fissato un pernio M. Infine nei canali MC, MB, scorrono i perni R, A, ed il pernio M scorra nel canale del lato PD della squadra RPD. Ora facilmente si comprende che fissando il pernio R ad una distanza da P uguale al parametro, e movendo la squadra RPD lungo l'asse AX, poichè i lati MC, MB della squadra BMC non possono allontanarsi dai perni A, R, il pernio M sarà obbligato a percorrere il canale PD, e se porta un lapis segnerà con continuità la parabola avente il vertice nel pernio A. Infatti in qualunque posizione si trovi il pernio M, siccome gli angoli delle squadre sono invariabili, si verificherà sempre la nota proprietà della parabola (§§ 412, 414)

$$AP : MP :: MP : PR;$$

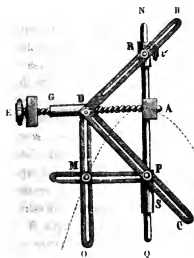


Fig. 101.

e così lo strumento eseguirà la prima regola del metodo delle ordinate (§ 438).

445. Supponiamo invece due verghe NQ, AE (fig. 401) unite a squadra in A, lungo le quali possano scorrere rispettivamente i lati SP, DG delle squadre SPM, ODG, aventi i perni P, D nei loro angoli; ed una terza squadra CDB imperniata col vertice in D, che abbia il lato CD

capace di scorrere sul pernio P, ed il lato DB sopra un pernio R da fissarsi con una vite di pressione  $\nu$  sull'asse QN ad una

distanza  $AR$  uguale al parametro. Con questa disposizione se si muove il lato  $DG$  della squadra  $GDO$  lungo la verga  $AE$  con un meccanismo analogo a quello del compasso precedente, l'altro lato  $DO$  si muoverà parallelamente all'asse  $NQ$ , ed il lato  $MP$  della squadra  $MPS$ , trasportata per l'intermediario della squadra  $BDC$  lungo  $NQ$ , si muoverà parallelamente alla verga  $AE$ , e perciò un lapis  $M$  infilato nei canali praticati nei lati  $DO$  e  $PM$  essendo animato nello stesso tempo dai due movimenti delle squadre  $SPM$ ,  $GDO$ , acquisterà un movimento risultante unico, e descriverà continuamente una parabola  $MA$  avente il vertice in  $A$ . Anco in tal caso poichè  $AD = MP$ , si avrà sempre (§§ 412, 414)

$$AP : MP :: MP : AR,$$

e quindi meccanicamente riprodotta la regola del (§ 438).

446. La proprietà della parabola di avere ogni suo punto

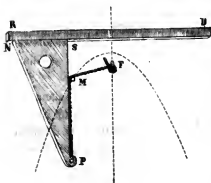


Fig. 102.

ugualmente distante dal fuoco e dalla direttrice (§ 416) ha suggerito l'idea dei più semplici stromenti che possano costruir la curva. Si disponga una squadra  $NSP$  (*fig. 102*) in modo che un lato  $SN$  possa scorrere lungo una riga fissa  $DR$ ; dipoi si fissi il capo di un filo lungo precisa-

mente quanto il lato  $SP$  ad un chiodo  $F$ , e l'altro capo all'estremità  $P$  dello stesso lato della squadra. Se con un lapis  $M$  si tiene teso il filo e si percorre il lato  $SP$  senza distaccarsene, mentre il lato  $SN$  si muove lungo la riga  $DR$ , segneremo una parabola che avrà il chiodo  $F$  per fuoco, e la direttrice rappresentata dalla riga  $DR$ ; ed è evidente che essendo il filo  $FMP$

uguale in lunghezza al lato  $SP$ , la porzione  $FM$  dell'uno è uguale alla porzione  $MS$  dell'altro, e perciò il punto  $M$  si trova ad egual distanza dal fuoco, e dalla direttrice (§ 116). Di qui si vede il perchè la retta  $DR$ , che dirige il moto della squadra, ha ricevuto il nome di *direttrice*.

147. Dietro il medesimo principio (§ 116) si può disporre un *parallelogrammo*  $FBRC$  (fig 103) coi lati  $FB$ ,  $BR$ , e  $CR$ ,  $FC$

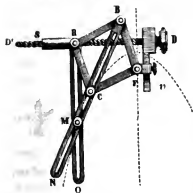


Fig. 103.

uguali due a due, ed articolati negli angoli in modo che l'angolo  $F$  sia posto in un pernio da fissarsi, per mezzo di una vite di pressione  $v$ , ad una distanza da una verga  $DD'$  rappresentante la direttrice, uguale alla metà del parametro (§ 115); e l'angolo opposto  $R$  sia imperniato nell'angolo di una squadra  $SRQ$  capace di scorrere col lato  $SR$  nella verga  $DD'$ . Ma

se una riga  $BN$  è imperniata per una sua estremità nell'angolo  $B$  del parallelogrammo, ed il pernio  $C$  dell'angolo opposto scorre nel canale della riga, per ogni punto  $R$  della direttrice la riga  $BN$  si disporrà secondo la posizione corrispondente della tangente alla curva (§ 119), di cui il punto di contatto si troverà sulla perpendicolare condotta alla direttrice dal punto  $R$ , ossia sul lato  $RQ$  della squadra  $SRQ$  (§ 139). Dunque movendo, per esempio, col solito meccanismo, la squadra  $SRQ$  lungo la verga  $DD'$ , un lapis  $M$  obbligato a scorrere simultaneamente nei canali della riga  $BN$  e del lato  $RQ$  descriverà con moto continuo la parabola, che ha per fuoco il pernio  $F$  e per direttrice la verga  $DD'$ .

148. Quando sia dato l'asse, il vertice  $A$  ed un punto  $M$  della parabola, si può disporre il seguente apparecchio. Si sup-





alla corda  $AM$ , un lapis  $m$  obbligato a scorrer insieme nei canali del regolo  $MQ$  e del lato  $CD$  descriverà una linea continua, che è la parabola richiesta. Infatti in qualunque posizione del lapis  $m$  i triangoli  $MPA$ ,  $bPO$  si manterranno simili, e daranno

$$MP : Mb :: AP : AO$$

e siccome abbassando da  $m$  la ordinata  $mp$  si ha

$$Mb = CP = mp$$

perciò sarà  $MP : mp :: AP : AO$  ;

cioè rimane verificata una delle proprietà della parabola (§ 117. e nota 1) e l'apparecchio da me immaginato traccia la curva rigorosamente in modo continuo, ed eseguisce una operazione analoga al metodo delle corde (§ 440).

**Misura della parabola.** — 449. La misura lineare della lunghezza totale di una parabola non può ottendersi giammai, poichè per l'indole di questa curva è impossibile determinarne le estremità (§ 100). Quanto alla misura di un arco parabolico finito, quale appunto si ricerca nel concreto dei casi (§ 432), essa si ottiene soltanto per approssimazione. A tal fine potranno applicarsi i processi che abbiamo precedentemente esposti per la misura delle curve in generale a seconda del grado di approssimazione richiesto dall'importanza della operazione (§§ 69 al 76).

450. La misura poi o la quadratura della superficie della parabola, cioè di una superficie piana terminata da una porzione di parabola, si può ottenere esatta con tutto il rigore matematico. La parabola, è la sola fra le sezioni coniche che la Geometria abbia potuto ridurre in forma di quadrato, ed Archimede è stato il primo che ne abbia data la dimostrazione. <sup>1</sup> Mentre a tale ricerca la pratica può giungere applicando con-

<sup>1</sup> ARCHIMEDES. *De quadratura Parabolæ*.

venientemente qualcuno dei metodi generali di quadratura altrove insegnati (§§ 77 a 89), troverà più facilità e conseguirà l'assoluta esattezza adoprando la regola particolare stabilita dal rigor geometrico, che andiamo ad esporre. Prima mostriamo la proprietà fondamentale, di cui gode la parabola rispetto alle superficie.

151. Per fissare le idee si prendano sulla curva tre punti  $m, m', M$  (fig. 105), e da questi si conducano le tangenti  $mt, m't', MT$  ed i raggi vettori  $Fm, Fm', FM$ , prolungandoli fino a che non incontrino le tangenti nei punti  $t, t', T$ : dai medesimi punti si abbassino sulla direttrice  $DR$  le perpendicolari  $mr, m'r', MR$ , e si compiano i parallelogrammi  $mrst, m'r's't'$ ,  $MRST$ . Ciò posto, poichè  $MT$  prolungata scende perpendicolare sopra  $FR$ , e la divide nel punto di incontro  $O$  in due parti uguali  $OR, OF$  (§ 119), il triangolo  $TFM$  ed il parallelogrammo  $MRST$  hanno oltre la base comune  $MT$ , uguali anco le loro altezze  $FO, OR$ , e per ugual dimostrazione si troverebbe che il triangolo  $t'Fm'$  ed il parallelogrammo  $m'r's't'$  hanno la base comune  $m't'$  e la altezza uguale, e che il triangolo  $tFm$  ha la medesima base  $mt$  e la stessa altezza del parallelogrammo  $mrst$ ; ma la geometria elementare insegna che ciascuna delle aree dei triangoli  $tFm, t'Fm', TFM$  è rispettivamente uguale alla metà di ciascuna delle aree dei parallelogrammi  $mrst, m'r's't', MRST$ ; Dunque *la somma delle aree dei triangoli è uguale alla metà della somma delle aree dei parallelogrammi*. Ed è evidente che questa relazione dovrà sempre verificarsi estendendo anco all'infinito il numero dei punti presi sulla curva, e qualunque sia la loro distanza.



Fig. 105.

zione si troverebbe che il triangolo  $t'Fm'$  ed il parallelogrammo  $m'r's't'$  hanno la base comune  $m't'$  e la altezza uguale, e che il triangolo  $tFm$  ha la medesima base  $mt$  e la stessa altezza del parallelogrammo  $mrst$ ; ma la geometria elementare insegna che ciascuna delle aree dei triangoli  $tFm, t'Fm', TFM$  è rispettivamente uguale alla metà di ciascuna delle aree dei parallelogrammi  $mrst, m'r's't', MRST$ ; Dunque *la somma delle aree dei triangoli è uguale alla metà della somma delle aree dei parallelogrammi*. Ed è evidente che questa relazione dovrà sempre verificarsi estendendo anco all'infinito il numero dei punti presi sulla curva, e qualunque sia la loro distanza.

Ora la somma dei triangoli si compone del settore  $AFMm'm$  più la somma dei triangoli mistilinei  $mm't'$ ,  $m'MT$  ec. e la somma dei parallelogrammi non è che la somma della area  $Amm'MRn$  e dei triangoli  $nrs$ ,  $n'r's'$ ,  $NRS$  ec., diminuita delle somme dei triangoli  $mm't'$ ,  $m'MT$  ec., e dei trapezi  $m'n'r$ ,  $m'TN'r'$  ec.; ma mentre le superficie del settore  $AFMm'm$ , e dello spazio  $Amm'MRn$  sono costanti; le somme dei triangoli  $mm't'$ ,  $m'MT$ , ec., e  $nrs$ ,  $n'r's'$ ,  $NRS$  ec., e dei trapezi  $m'n'r$ ,  $m'TN'r'$ , ec. sono variabili, e col crescere il numero dei punti  $m$ ,  $m'$ , ec. all' infinito possono divenire più piccole di qualunque quantità assegnabile, e perciò trascurabili senza errore; dunque la relazione trovata fra le somme delle aree dei triangoli e dei parallelogrammi esiste con tutto il rigore matematico anco fra le superficie del settore  $AFMm'm$ , e dello spazio  $Amm'MRn$ ; cioè *l'area del settore parabolico AFMA è uguale alla metà dell'area esterna AMRnA intercetta fra la direttrice e l'arco del settore.*<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Se  $S$  indica lo spazio  $AMRnA$ , ed  $s$  il settore, chiamando  $\alpha$  la somma dei triangoli mistilinei,  $\beta$  la somma dei triangoli esterni alla direttrice e  $\gamma$  la somma dei trapezi,  $s + \alpha$  rappresenterà la somma dei triangoli, ed  $S + \beta - (\alpha + \gamma)$  la somma dei parallelogrammi, e quindi dovrà aversi sempre la relazione

$$(1) \quad s + \alpha = \frac{1}{2} S + \frac{1}{2} (\beta - (\alpha + \gamma))$$

questa relazione dovendo verificarsi, come abbiamo detto, per qualsivoglia numero di punti e per qualunque loro distanza, le quantità costanti  $s, S$  sono i limiti delle quantità variabili  $\alpha, \beta, \gamma$ , e perciò deve essere  $s = \frac{1}{2} S$ ; che se ciò non fosse, si supponga che sia  $s = \frac{1}{2} S \pm c$ , ove  $c$  è una quantità necessariamente costante, allora paragonandola colla (1) avremo

$$\frac{1}{2} (\beta - (\alpha + \gamma)) - \alpha = \pm c,$$

ma  $\alpha, \beta, \gamma$  essendo quantità variabili, e  $c$  costante, questa equazione è contraria all'ipotesi, dunque è necessariamente  $s = \frac{1}{2} S$ .

152. Poste le stesse cose, dal punto  $M$  (fig. 406) si conduca al vertice  $A$  la corda  $MA$ , sull'asse l'ordinata  $MP$ , e dal vertice  $A$  si tiri  $AS$  parallela alla direttrice fino all'incontro in  $S$  della perpendicolare  $MR$ . Poichè  $DR = AS = PM$ , e  $AD = AF$  (§ 145), il rettangolo  $DRSA$  ed il triangolo  $AMF$  hanno la base e l'altezza uguali, e perciò la superficie del primo è doppia della superficie del secondo: ma lo spazio



Fig. 406

ANMRD è doppio del settore AFMN (§ 151); Dunques dallo spazio ANMRD si toglie il rettangolo ASRD, lo spazio ANMS sarà pure il doppio dell'area del segmento AMN, che resterebbe togliendo il triangolo AMF dal settore AFMN. Adesso il segmento APMN è la differenza del rettangolo APMS e dello spazio ANMS; cioè  $APMN = APMS - ANMS$ : ma lo spazio ANMS essendo doppio del settore ANM, e poichè i triangoli APM, AMS sono uguali, deve essere la terza parte dell'area dell'intero rettangolo APMS; Dunque avremo il segmento

$$APMN = APMS - \frac{1}{3} APMS = \frac{2}{3} APMS :$$

cioè l'area del segmento APMN è due terzi del rettangolo circoscritto APMS: perciò si misura l'area del segmento parabolico compreso tra l'asse e la semicorda prendendo il terzo del doppio prodotto dei numeri che rappresentano la loro misura.

Se finalmente si ripete l'operazione sulla parte opposta della parabola, il segmento  $APmn$  sarà pure i due terzi del rettangolo  $APms$ , ed in conseguenza l'intero segmento  $MAm$  sarà i due terzi dell'intero rettangolo  $MSsm$ . Dunque il segmento parabolico formato da un arco e da una corda perpendicolare all'asse si misura prendendo il terzo del doppio prodotto dei numeri che rappresentano le misure della saetta e della corda.

Per esempio: il segmento da riquadrare abbia una corda

di metri 8,4 ed una saetta di metri 3,26; avremo per prodotto  $27^m,384$  e raddoppiando  $54^m,768$ , ed infine dividendo per 3 si avrà per quoziente  $18^m,256$  quadrati, che sarà la quadratura del segmento.

153. Per avere la misura di un segmento  $MNA_m$  insistente sopra una corda qualunque  $Mm$  (fig. 107), abbassate dalle estremità  $M, m$  della corda le perpendicolari  $MP, mp$  sull'asse, si calcola la superficie del segmento  $ANMP$  secondo la regola precedente, e se ne sottrae quella del triangolo  $OMP$ , poi si calcola la superficie del segmento  $Anmp$ , e si somma con quella del triangolo  $Omp$ : finalmente aggiunti insieme i due numeri che si ottengono



Fig. 107.

da questa addizione e da quella sottrazione, avremo una somma, che esprime la superficie del segmento  $MNA_m$ .

154. In alcuni casi la quadratura del segmento  $MNA_m$  si può avere per mezzo di un calcolo più semplice. Sulla metà della corda  $Mm$  (fig. 107) condotto il diametro  $aB$ , e determinato l'asse principale  $AP$  (§ 130), dalle estremità  $M, m$  si conducano le tangenti  $MV, mV$ , le quali

concorreranno sul diametro nel punto  $V$  (§ 131), ed incontreranno l'asse principale nei punti  $T$  e  $t$ . Dalle cose esposte fin qui abbiamo il segmento (§ 153)

$$MNA_m = \frac{2}{3} (APMS + Apms) - (OMP - Omp);$$

e siccome  $AT = AP$ ,  $At = Ap$  (§ 131 nota 1), la Geometria ci insegna che i rettangoli  $APMS$ ,  $Apms$  sono uguali rispettivamente ai triangoli  $MTP$ ,  $mtp$ , onde detta misura diviene

$$MNA_m = \frac{2}{3} (MTP + mtp) - (OMP - Omp).$$

di più essendo il triangolo  $MTP = MTO + OMP$  ed il triangolo  $mtp = mtO - Omp$  si ottiene il segmento

$$MNA_m = \frac{2}{3} (MTO + mtO) - \frac{1}{3} (OMP - Omp),$$

ma è la somma dei triangoli

$$MTO + mtO = MV_m + TV_t,$$

dunque sostituendo avremo

$$(1) \quad MNA_m = \frac{2}{3} MV_m + \frac{2}{3} TV_t - \frac{1}{3} (OMP - Omp).$$

Ora osservando che

$$Tt = AT - At = AP - Ap = Pp = PO + Op$$

$$BP = MP - MB = MP - mp - BP = \frac{MP - mp}{2},$$

avremo la superficie del triangolo

$$TV_t = \frac{1}{2} Tt \times BP = \frac{1}{4} (PO + Op) (MP - mp);$$

ossia eseguendo la moltiplicazione,

$$TV_t = \frac{PO \cdot MP}{4} + \frac{Op \cdot MP}{4} - \frac{PO \cdot mp}{4} - \frac{Op \cdot mp}{4}.$$

I triangoli però  $OMP$ ,  $Omp$  hanno per misura

$$\frac{PO \cdot MP}{2}, \quad \frac{OP \cdot mp}{2},$$

e danno la proporzione

$$MP : mp :: PO : Op,$$

da cui si rileva che  $Op \cdot MP = PO \cdot mp$ .

Onde sarà

$$TV_t = \frac{1}{2} (OMP - Omp), \text{ e quindi } \frac{2}{3} TV_t = \frac{1}{3} (OMP - Omp).$$

Dunque sostituendo nella espressione (1) avremo il segmento

$$MNA_m = \frac{2}{3} MV_m;$$

Cioè la superficie del segmento parabolico insistente sopra una corda qualunque equivale a due terzi del triangolo formato dalla corda e dalle tangenti condotte all'estremità dell'arco; e conseguentemente lo spazio compreso dall'arco e dalle tangenti è un terzo del medesimo triangolo. E finalmente conducendo al vertice  $a$  del diametro le corde  $Ma, ma$ , poichè  $AP'$  è uguale ad  $aV$  (§ 134 e nota 1), il triangolo  $MVm$ , che ha la stessa base del triangolo  $Mam$ , avrà l'altezza doppia, onde il triangolo  $MVm$  è doppio del triangolo  $Mam$ . Dunque si avrà ancora la misura del segmento  $MNA_m$  quadruplicando il terzo del triangolo inscritto  $Mam$ .<sup>1</sup>

§ 155. È chiaro che per misurare lo spazio parabolico  $MNm$  (fig. 107) compreso fra due corde parallele  $Mm, Nn$ , si calcoleranno le superficie dei segmenti  $MNA_m, NaAn$  con uno dei metodi indicati (§ 154), e si toglierà il minore dal maggiore; il resto indicherà la quadratura della superficie  $MNm$  richiesta.

**Paraboloid.** — § 156. Si supponga che la parabola girando intorno al suo asse principale generi una superficie di rivolu-

<sup>1</sup> Questa ultima proposizione esprime il caso generale della misura di un segmento parabolico qualunque; così il parallelogrammo  $MM'm'm$  doppio del triangolo  $Mam$  si cangia in un rettangolo quando il diametro divide simmetricamente la curva, cioè divenga l'asse principale (§ 152). Il calcolo integrale poi dimostra a priori ciò che noi abbiamo stabilito come semplice corollario. Infatti, chiamando  $\varphi$  l'angolo che fanno le coordinate, ed  $s$  il segmento compreso fra l'ordinata e l'ascissa, avremo  $ds = \operatorname{sen} \varphi \cdot y \, dx$ ; ma dall'equazione riferita ai diametri si ha  $y = \sqrt{p'x}$ , ove  $p'$  è terza proporzionale costante fra  $x$  ed  $y$ ; dunque sostituendo ed integrando avremo

$$s = \operatorname{sen} \varphi \int \sqrt{p'x} \cdot dx = \frac{2}{3} \operatorname{sen} \varphi \cdot y \cdot x$$

e facendo  $y = MP', x = aP'$ , sarà  $s = \frac{2}{3} \operatorname{sen} \varphi \cdot MP' \cdot aP'$ ; ma  $MB = \operatorname{sen} \varphi \cdot MP'$  dunque  $s = MNA_p' = \frac{2}{3} MB \cdot aP'$ , e siccome  $MP' = P'm$ , avremo il segmento  $MNA_m = \frac{2}{3} (MB + mb) aP' = \frac{2}{3} MM'm'm$ ; ossia  $MNA_m = \frac{4}{3} Mam$ .

zione (§ 13). Questa superficie, che per la natura della generatrice non è chiusa nè è limitata (§ 100), si chiama *paraboloide di rivoluzione*. La paraboloide si può costruire sul tornio col mezzo di una *sagoma* formata da una mezza parabola, l'asse della quale coincida con quello del tornio. Ogni sezione che nasce dal tagliare la superficie paraboloidica con un piano perpendicolare all'asse di rotazione è un circolo. Tutti i piani che passano pell'asse, cioè i piani meridiani, producono altrettante parabole uguali alla generatrice, che hanno tutte il medesimo fuoco. Ogni altro piano obliquo all'asse taglia la paraboloide secondo una *ellisse*, o una parabola differente dalle precedenti. La porzion di paraboloide terminata da un circolo si dice *callotta*, o *segmento paraboloidico*.

157. I migliori apparecchi che vengono impiegati negli usi della *vila* per concentrare in generale i raggi paralleli della luce, del calore e del suono, o emanati da un punto per rifletterli in un fascio fra loro paralleli, sono formati di una callotta di paraboloide. Imperocchè per le proprietà che ha la normale della parabola di dividere per metà l'angolo formato dal raggio vettore e dal diametro, condotti ad un medesimo punto della curva (§ 126) i corpi elastici, come i raggi lucidi, calorifici e sonori, lanciati nella concavità secondo le direzioni parallele all'asse, devono riflettersi secondo i raggi vettori delle diverse parabole generatrici che incontrano, e passare tutti pel fuoco comune, e viceversa; quelli poi lanciati sulla convessità secondo la direzione dei raggi vettori devono riflettersi in un fascio paralleli all'asse. I riflettori si costruiscono piegando una lastra metallica col mezzo di un paraboloide di legno duro fatto sul tornio, o con una sagoma che sia un segmento di parabola, e procurando che la superficie riflettente sia ben pulita e levigata.

158. I *reverberi* dei lampioni destinati ad illuminare i corridori, le gallerie strette e le strade sono formati di una callotta



di paraboloidi coll'asse pressochè orizzontale. Un foro o un taglio praticato nella parte superiore dà il passaggio al cilindro di vetro o al fumo della fiaccola situata nel fuoco della paraboloide. Si intende bene che i raggi lanciati dalla fiaccola sulla concavità del reverbero sono riflessi paralleli tra loro in un fascio senza alcuna perdita di luce. Bisogna avvertire di dare al diametro del lembo circolare la maggior grandezza possibile, e di inclinare l'asse della paraboloidi in modo, che la sua direzione vada ad incontrare il suolo nella metà in circa della distanza che separa due reverberi: e siccome si può immaginare più paraboloidi col fuoco comune, così una sola fiaccola posta nel fuoco di più reverberi può illuminare insieme due, tre e quattro direzioni.

459. I fari elevati all'ingresso dei porti, all'imboccatura dei fiumi, sulle coste del mare, e nei luoghi pericolosi per avvertire da lontano i naviganti della loro situazione hanno dei riflettori paraboloidici. I raggi emanati da una fiaccola posta nel fuoco del reverbero vengono perciò riflessi paralleli fra loro, formando un cilindro di luce, la quale sarà unicamente veduta da coloro che anco a lontana distanza traversano il fascio luminoso. Ma i riflettori del faro girano ordinariamente intorno ad un asse verticale, ed alcune volte la luce si fa passare attraverso dei cristalli colorati; onde vengono illuminati successivamente ed in modo diverso tutti i punti dell'orizzonte. I naviganti dai colori, e dalla durata delle apparizioni e dalla assenza della luce distinguono i fari dai fuochi accidentalmente accesi sulle coste, e i diversi fari di una medesima costa. <sup>1</sup>

<sup>1</sup> Oggidi nei fari ben ordinati la difficoltà di costruire grandi specchi metallici e di mantenere puliti, e preservati dalle ossidazioni la sua superficie ha fatto preferire gli apparecchi diottrici al sistema di riflessione. I raggi lucidi emanati dalla fiaccola si refrangono attraverso di lenti colorate e girevoli intorno ad un asse verticale, formando così il fascio di luce che deve successivamente illuminare tutti i punti dell'orizzonte.

160. I *portavoce*, le *trombe stentoree* o *parlanti*, sono costruiti sullo stesso principio fisico della parabola. Questi apparecchi sono fatti in modo che il fuoco della superficie paraboloidica coincide col punto ove viene applicata la bocca, o dove si riunisce la voce di chi parla, e onde i suoni riflessi parallelamente all'asse senza disperdersi possono esser intesi a grandi distanze dalle persone verso le quali si dirigono. Gli uffiziali di marina usano di tali stromenti per fare intendere i loro comandi in mezzo al fischio dei venti, al romor delle vele, ed al muggito del mare.

161. Il *cornetto acustico* serve in modo opposto a compensare lo indebolimento dell'udito. I suoni della parola diretti nella parte interna di un paraboloido troncato nel fuoco imprimono alle particelle dell'aria contenuta nel cornetto dei movimenti presso a poco paralleli all'asse; e quelli che colpiscono le pareti essendo riflessi nel fuoco, saranno percepiti senza dispersione da un orecchio in esso applicato.

162. Collocate due paraboloidi metalliche coll'asse nella stessa direzione e rivolte per le loro concavità, se una sorgente di calore si pone nel fuoco di una, i raggi riflettendosi parallelamente all'asse andranno a riflettersi e concentrarsi nel fuoco dell'altra, e riscalderanno e bruceranno un corpo combustibile ivi posto. Quando i raggi solari si ricevono nella concavità di uno specchio paraboloidico, di cui l'asse si dirige verso il gran-

<sup>1</sup> Affinchè non vi sia alcuna divergenza fra le direzioni dei movimenti che la voce imprime alle particelle dell'aria, si procura di far precedere alla paraboloidica una ellissoide in modo che uno dei fuochi sia comune ad ambedue, e l'altro sia il punto ove si applica la bocca. Allora è chiaro che tutti i suoni riflessi dalla parete concava dell'ellissoide andranno a passare pel fuoco comune, e si incroceranno per andare quindi a riflettersi sulla paraboloidica colla legge esposta. Impiegando unicamente la paraboloidica, quelli fra i suoni che non colpissero la sua superficie si allontanerebbero dalla direzione parallela all'asse, e andrebbero interamente perduti.

d'astro, si concentra nel suo fuoco una tal quantità di calore da infiammare corpi combustibili, e perfino da volatilizzare metalli. Ed ecco le ragioni per cui i riflettori destinati in generale a concentrare il calore si chiamano *specchi ustorii*. Conciossiachè si comprende come sia probabile che nell'assedio di Siracusa fatto dal console Marcello, secondo ci narra la storia, Archimede abbruciasse per mezzo di specchi ustorii le navi nemiche dei Romani. A mio avviso il fatto può spiegarsi colla combinazione di specchi paraboloidici. Si supponga uno specchio concavo ABCD (*fig.* 108), troncato in BC, e col fuoco F che coincida con quello di uno specchio convesso *abcd*, e gli assi di questi specchi facciano un angolo qualunque. È chiaro che

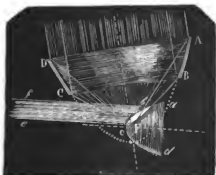


Fig. 108

tutti i raggi solari ricevuti nella concavità del primo specchio riflettendosi nel fuoco F, si concentrano; nella porzione *bc* della superficie del secondo specchio che incontrano; ma di nuovo debbono riflettersi paralleli all'asse dello specchio

convesso (§ 157); dunque il fascio *bef* dei raggi concentrati abbrucerà i corpi che si trovano sulla sua direzione. Se infine gli specchi erano combinati in modo da render variabile l'angolo formato dagli assi mentre il fuoco rimaneva comune, Archimede col primo specchio avrà potuto seguire il movimento del sole, ed avrà continuamente diretto il fascio riflesso dall'altro sulle navi nemiche.

**Misura della paraboloidc.** — 463. Sia da misurarsi la superficie curva di una calotta di paraboloidc terminata da un circolo perpendicolare all'asse. Determinata la parabola ge-

neratrice  $MAm$  (fig. 109) chiusa dalla corda  $Mm$  rappresentante il diametro del circolo che termina la paraboloide, e condotto l'asse  $AN$  e trovato il fuoco  $F$  (§ 130), si riporti la distanza  $AF$  due volte da  $P$  in  $N$ .  $PN$  divenendo uguale alla metà del parametro sarà sunnormale, e



Fig. 109.

la retta  $MN$  condotta per  $M$  ed  $N$  normale al punto  $M$  (§ 122). La stessa  $AF$  poi si riporti tre volte da  $M$  in  $O$ , e si conduca  $ON$ , e quindi prendendo  $Mn$  uguale a  $MN$ , da  $n$  si tiri  $nQ$  parallela ad  $ON$  fino che incontra in  $Q$  il prolungamento di  $MN$ . In fine i triangoli

simili  $ONM$ ,  $nQM$  daranno

$$MO : Mn :: MN : MQ$$

ossia

$$3AF : MN :: MN : MQ.$$

Ciò posto, chiamando  $\pi$  il rapporto della circonferenza al diametro, la misura della superficie curva della calotta si esprime con

$$\pi \cdot MN \cdot MQ - 8 \frac{1}{3} \pi \overline{AF^2};$$

cioè si ottiene cercando la misura della superficie curva di un cilindro, che ha per diametro la normale  $MN$  e per altezza una  $MQ$  terza proporzionale dopo la normale, e dopo il triplo della distanza dal fuoco al vertice, e quindi sottraendo otto volte il terzo della misura dell'area di un cerchio che ha la medesima distanza per raggio. <sup>1</sup>

<sup>1</sup> Questa regola è dedotta da una formula, che soltanto col calcolo integrale possiamo con facilità dimostrare. Se nella formula generale

$$S = 2\pi \int y \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

che esprime la superficie dei solidi di rivoluzione, si introduce il va-

164. Per misurare finalmente il volume di una calotta di paraboloido terminata da un cerchio, e di cui la superficie  $MAM$  rappresenti una sezione generatrice (fig. 409). Si calcola il volume di un cilindro retto, che abbia per base un circolo di raggio uguale alla ascissa o alla saetta  $AP$  della parabola generatrice, e per altezza il doppio della distanza  $AF$  dal fuoco al vertice. Ovvero, quando non si voglia ricorrere alla determinazione del fuoco  $F$ , si calcola il volume di un cilindro, che abbia per base il circolo del raggio  $PM$ , e per altezza la metà dell'ascissa o della saetta  $AP$ .<sup>1</sup>

lore di  $dx$  dato dall'equazione della curva, avremo per la superficie del paraboloido

$$S = \frac{4}{p} \pi \int y \, dy \sqrt{\left(y^2 + \frac{p^2}{4}\right)}.$$

Facendo  $y^2 + \frac{p^2}{4} = z^2$ , sarà  $y \, dy = z \, dz$ , e sostituendo,  $S = \frac{4\pi}{p} \int z^2 \, dz$

e quindi  $S = \frac{4\pi}{3p} z^3 + C$ . Ma fatto  $y = 0$  abbiamo  $C = -\frac{\pi p^3}{6}$ ,

dunque  $S = \frac{4\pi}{3p} z^3 - \frac{\pi p^3}{6}$ , ossia  $S = \pi z \frac{4z^2}{3p} - \frac{8}{3} \cdot \frac{\pi p^3}{16}$ .

Ora osservando che  $\frac{p}{2} = PN$ ,  $y = PM$  fig. (409), il triangolo rettangolo  $MPN$

darà  $\overline{MN}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PN}^2 = y^2 + \frac{p^2}{4} = z^2$  ossia  $MN = z$ . Inoltre è  $\frac{p}{4} = AF$ ,

perciò  $S = \pi MN \cdot \frac{\overline{MN}^2}{3AF} - \frac{8}{3} \pi \overline{AF}^2$ ; ma siccome  $3AF : MN :: MN : \frac{\overline{MN}^2}{3AF}$

abbiamo  $\frac{\overline{MN}^2}{3AF} = MQ$ : dunque sarà  $S = \pi MN \cdot MQ - \frac{8}{3} \pi \overline{AF}^2$ .

<sup>1</sup> Qui pure il calcolo integrale ha suggerita la regola. Infatti: il volume  $V$  dei solidi di rivoluzione esprimendosi generalmente con

$V = \pi \int y^2 dx$ , e nella parabola essendo  $y^2 = px$ , avremo per la so-

lidità del paraboloido  $V = \pi \int y^2 dx = \frac{p}{2} \cdot \pi x^2$ ; ovvero, sostituendo

$y^2$  a  $px$ ,  $V = \frac{x}{2} \cdot \pi y^2$ ; ma  $\frac{p}{2} = 2AF$  (fig. 409)  $x = AP$  ed  $y = MP$ .

Dunque  $V = 2AF \times \pi \overline{AP}^2$ , ovvero  $V = \frac{AP^3}{2} \times \pi \overline{MP}^2$ .

**Ellisse.**

**LEZIONE NONA.**

*Proprietà geometriche della Ellisse. — Applicazioni ed esempi. —  
Tangenti e Normali.*

**Proprietà geometriche dell'ellisse.** — 165. Nella ellisse  $ABab$  (§ 104) la porzione  $Aa$  (*fig. 110*) dell'asse intercetta dalla curva si chiama *asse maggiore, primo o trasverso*. Il punto di mezzo  $C$  e le estremità  $A, a$



Fig. 110.

ed i vertici (§§ 99, 104) della ellisse. La perpendicolare poi, o la doppia ordinata rettangola  $Bb$  (§ 64) condotta dal centro  $C$  dell'asse maggiore, si chiama *asse minore, secondo o coniugato*.

166. Se si fa centro in una delle estremità  $B$  (*fig. 110*) dell'asse minore, e con un raggio uguale alla metà  $AC$  dell'asse maggiore  $Aa$  si descrive un arco di cerchio, esso taglia l'asse in due punti  $f, F$ , che si dicono i *fuochi* della ellisse. E siccome  $BC$  è perpendicolare ad  $Aa$ , la porzione  $fF$  dell'asse maggiore rimane divisa dal centro  $C$  in due parti uguali  $Cf, CF$ , ciascuna delle quali si chiama *eccentricità*. Le rette poi  $fM, FM$ , che dai fuochi  $f, F$  vanno ad un punto qualunque  $M$  della curva, si chiamano *raggi vettori* (§ 70, nota 2).

167. Ora, condotta per l'asse  $VC$  d'un cono (*fig. 111*) o

per l'asse  $cC$  di un cilindro (*fig. 112*), un piano perpendicolare al piano della ellisse  $AMmam'M'$  (§§ 99, 101, 102), si facciano due sezioni circolari  $DMBM'$ ,  $dmbm'$ , che taglino la ellisse. Analogamente a quanto abbiamo considerato in proposito per la parabola, le linee di intersezione  $MM'$ ,  $mm'$  sono contemporaneamente corde, ossia doppie ordinate rettangole dei cerchi e della ellisse (§ 112) sì nel cono che nel cilindro, per cui dalla geometria elementare avremo

$$\overline{MP}^2 = \overline{M'P}^2 = DP \times PB,$$

$$\overline{mp}^2 = \overline{m'p}^2 = dp \times pb,$$

dalle quali stabiliremo

$$(1) \quad \overline{MP}^2 : \overline{mp}^2 :: DP \times PB : dp \times pb.$$

Ma i triangoli simili  $DPa$ ,  $dpa$ , danno  $DP : dp :: aP : ap$ , e gli altri pur simili  $APB$ ,  $Apb$  danno  $PB : pb :: PA : pA$ , e quindi da queste due proporzioni si rileva

$$DP \times PB : dp \times pb :: aP \times PA : ap \times pA ;$$

Dunque dalla proporzione (1) avremo

$$(2) \quad \overline{MP}^2 : \overline{mp}^2 :: aP \times PA : ap \cdot pA ;$$

cioè nella ellisse *i quadrati delle mezze corde parallele all'asse minore sono proporzionali ai prodotti delle porzioni in cui dividono l'asse maggiore, o come suol dirsi, i quadrati delle ordinate sono proporzionali ai rettangoli delle ascisse corrispondenti.*

168. La proporzione (2) che esprime questa proprietà dovendo verificarsi per qualunque ordinata, avremo pure (*fig. 113*)

$$\overline{MP}^2 : aP \times PA :: \overline{CB}^2 : aC \times CA :$$



Fig. 111.



Fig. 112.

ma l'asse  $Bb$  divide per metà l'asse maggiore e dà  $Ca = CA$ ,

$$\text{dunque} \quad (3) \quad \overline{PM}^2 : aP \times PA :: \overline{CB}^2 : \overline{CA}^2$$

cioè il rapporto del quadrato di una ordinata al rettangolo delle ascisse è costante, ed uguaglia il rapporto del quadrato dell'asse minore al quadrato dell'asse maggiore.

169. La doppia ordinata  $RR' = rr'$  (fig. 113) che passa per i fuochi, si chiama il *parametro* della ellisse. Per la proprietà che abbiamo ora dimostrata (§ 168) avremo

$$\overline{RF}^2 : aF \times FA :: \overline{CB}^2 : \overline{CA}^2$$

ed essendo  $aF = CA + CF$ ,  $FA = CA - CF$

$$\text{sarà} \quad aF \times FA = (CA + CF)(CA - CF) = \overline{CA}^2 - \overline{CF}^2$$

$$\text{d'onde} \quad \overline{RF}^2 : \overline{CA}^2 - \overline{CF}^2 :: \overline{CB}^2 : \overline{CA}^2;$$

ma dal triangolo rettangolo  $BCF$ , poichè  $BF = CA$  (§ 166), abbiamo

$$\overline{CA}^2 = \overline{BF}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CF}^2$$

$$\text{e quindi} \quad \overline{CA}^2 - \overline{CF}^2 = \overline{CB}^2$$

$$\text{dunque} \quad \overline{RF}^2 : \overline{CB}^2 :: \overline{CB}^2 : \overline{CA}^2$$

$$\text{ossia} \quad RF : CB :: CB : CA$$

e quindi raddoppiando ogni termine  $RR' : Bb :: Bb : Aa$  cioè il *parametro* nella ellisse è sempre

terzo proporzionale dopo l'asse minore e l'asse maggiore.

170. Invertendo la proporzione (3) del (§ 168) si ottiene

$$\overline{CA}^2 : aP \times PA :: \overline{CB}^2 : \overline{MP}^2,$$

la quale decomponendo, diviene

$$\overline{CA}^2 - aP \times PA : \overline{CB}^2 - \overline{MP}^2 :: \overline{CA}^2 : \overline{CB}^2;$$

ma essendo  $Ca = CA$ ,  $CP = MQ$ ,  $MP = CQ$  (fig. 113) abbiamo

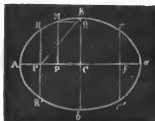


Fig. 113.



$$aP \times PA = (Ca + CP)(CA - CP) = \overline{CA}^2 - \overline{MQ}^2,$$

$$\overline{CB}^2 - \overline{MP}^2 = (CB + MP)(CB - MP) = bQ \times QB;$$

dunque sostituendo queste nuove espressioni, avremo

$$\overline{MQ}^2 : bQ \times QB :: \overline{CA}^2 : \overline{CB}^2;$$

cioè il quadrato di un'ordinata sta al rettangolo dell'ascisse prese sull'asse minore, come il quadrato dell'asse maggiore sta al quadrato dell'asse minore. Da questa proprietà analoga a quella trovata per l'asse maggiore, ne consegue che: 1<sup>o</sup> i quadrati delle mezze corde parallele all'asse maggiore sono proporzionali ai prodotti delle porzioni in cui dividono l'asse minore, ossia i quadrati delle ordinate sono pure proporzionali ai rettangoli delle ascisse; 2<sup>o</sup> la curva è parimente divisa dall'asse minore in due parti uguali e simmetriche (§ 401); 3<sup>o</sup> le ordinate condotte all'asse maggiore sono inversamente proporzionali alle ordinate condotte all'asse minore.

171. Coi principii esposti siamo ora in grado di mostrare



Fig. 114.

una delle più importanti proprietà della ellisse. Fatto centro in C (fig. 114), si descrivano coi raggi CA e CB le circonferenze AB'ab', A'B'a'b, e dai punti M, M' presi sulla curva si conducano all'asse maggiore le ordinate MP, M'P' e le ordinate MQ, M'Q' all'asse minore. È chiaro che avremo (§ 167, 170, 1<sup>o</sup>)

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{MP}^2 : \overline{M'P'}^2 :: aP \times PA : aP' \times P'A \\ \overline{MQ}^2 : \overline{M'Q'}^2 :: bQ \times QB : bQ' \times Q'B; \end{array} \right.$$

ma poichè le ordinate MP, M'P' prolungate incontrano la circonferenza maggiore nei punti m, m', e le ordinate MQ, M'Q' ta-

gliano la minore nei punti  $n, n'$ , la geometria elementare per le proprietà del circolo dà rispettivamente

$$\overline{mP}^2 \cdot \overline{m'P'}^2 :: aP \times PA : aP' \times P'A; \overline{nQ}^2 \cdot \overline{n'Q'}^2 :: bQ \times QB : bQ' \times Q'B;$$

dunque col confronto delle proporzioni (4) avremo

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{MP}^2 : \overline{M'P'}^2 :: \overline{mP}^2 : \overline{m'P'}^2 \\ \overline{MQ}^2 : \overline{M'Q'}^2 :: \overline{nQ}^2 : \overline{n'Q'}^2 \end{array} \right.$$

ossia

$$\left\{ \begin{array}{l} MP : M'P' :: mP : m'P' \\ MQ : M'Q' :: nQ : n'Q'; \end{array} \right.$$

cioè le ordinate della ellisse sono proporzionali alle ordinate dei circoli descritti coi semiassi.

172. Se da un punto qualunque  $M$  della ellisse  $ABab$  si conducono i raggi vettori  $fM, FM$  (fig. 115), e si abbassa l'ordinata  $MP$ , siccome in un triangolo rettangolo il quadrato dell'ipotenusa uguaglia la somma dei quadrati dei cateti, primieramente dal triangolo rettangolo  $fMP$  si ottiene

$$(5) \quad \overline{fM}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{fP}^2;$$



Fig. 115.

ora fra una delle proprietà dimostrate (§ 168 (3)) avendo

$MP^2 : aP \times PA :: \overline{CB}^2 : \overline{CA}^2$ ,  
si rileva il valore di

$$\overline{MP}^2 = \frac{\overline{CB}^2}{\overline{CA}^2} \times aP \times PA,$$

che per essere

$$aP \times PA = (CA + CP)(CA - CP) = \overline{CA}^2 - \overline{CP}^2$$

$$\text{diviene (6) } \overline{MP}^2 = \frac{\overline{CB}^2}{\overline{CA}^2} (\overline{CA}^2 - \overline{CP}^2) = \overline{CB}^2 - \frac{\overline{CB}^2 \times \overline{CP}^2}{\overline{CA}^2}$$

Inoltre, poichè  $fP = fC + CP$ , abbiamo

$$(7) \quad \overline{fP}^2 = (fC + CP)^2 = \overline{fC}^2 + \overline{CP}^2 + 2 \times fC \times CP;$$

e perciò sostituendo questi valori (6) e (7) nel valore (5)

$$\text{avremo} \quad \overline{fM}^2 = \overline{fC}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{CP}^2 + 2 fC \times CP - \frac{\overline{CB}^2 \times \overline{CP}^2}{\overline{CA}^2};$$

ma dalla definizione dei fuochi abbiamo

$$\overline{fC}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{fB}^2 = \overline{CA}^2$$

ovvero

$$\overline{CB}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{fC}^2$$

dunque avremo

$$\overline{fM}^2 = \overline{CA}^2 + 2 \times fC \times CP + \frac{\overline{fC}^2 \times \overline{CP}^2}{\overline{CA}^2} = \left( \overline{CA} + \frac{fC \times CP}{\overline{CA}} \right)^2$$

ossia

$$(8) \quad fM = \overline{CA} + \frac{fC \times CP}{\overline{CA}}.$$

In secondo luogo dal triangolo rettangolo FMP similmente si

ottiene

$$(9) \quad \overline{FM}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{FP}^2$$

ma abbiamo

$$\overline{FP}^2 = (fC - CP)^2 = \overline{fC}^2 + \overline{CP}^2 - 2 \times fC \times CP;$$

dunque sostituendo nella (9) questo valore e quello di  $\overline{MP}^2$  già trovato, e procedendo in un modo analogo avremo

$$\overline{FM}^2 = \overline{CA}^2 - 2 \times fC \times CP + \frac{\overline{fC}^2 \times \overline{CP}^2}{\overline{CA}^2} = \left( \overline{CA} - \frac{fC \times CP}{\overline{CA}} \right)^2$$

ossia

$$(10) \quad FM = \overline{CA} - \frac{fC \times CP}{\overline{CA}}.$$

Pertanto sommando i valori (8) e (10) dei raggi vettori  $fM$ ,  $FM$

avremo

$$fM + FM = 2 \times \overline{CA} + \frac{fC \times CP}{\overline{CA}} - \frac{fC \times CP}{\overline{CA}}$$

e poichè  $2 \times \overline{CA} = aC + CA = aA$  (§ 165), ed  $fC = FC$  (§ 166) sarà infine  $fM + FM = aA$ ; cioè la somma dei raggi vettori condotti ad uno stesso punto della ellisse è sempre uguale all'asse maggiore.

**Applicazioni.** — 173. Fra le curve piane la ellisse è la più importante e più feconda di applicazioni alle arti, ed è la più mirabile legge geometrica di natura fra quelle che regolano l'universo. Le proprietà che abbiamo esposte costituiscono in sostanza i principii fondamentali di tutta la geometria di questa curva. Con tali principii mostreremo in appresso altre utili proprietà, ed i casi speciali nei quali può applicarsi la ellisse: frattanto indichiamo alcuni esempi di generale applicazione.

174. La ellisse è la curva che meglio conviene agli archi e alle volte *schiacciate* o *a sesto scemo*, e *a sesto rialzato*, perchè può impiegarsi qualunque sia la *corda* e la *saetta*, e dà una forma più aggraziata alla curvatura delle centine; mentre le altre curve rientranti che esamineremo in seguito, non si adattano che secondo rapporti determinati fra la corda e la saetta, e le curve a più centri non soddisfano all'occhio per la gran differenza che ordinariamente esiste fra la curvatura dell'arco di mezzo e quella degli archi estremi. Il falegname si troverà nel caso di fare uso della ellisse nella costruzione delle centine per gli archi e le volte, e di applicarla nella costruzione di cornici da quadri, di telai da finestre, di tavole, e dove venga richiesta quella forma, o dove voglia impiegare una forma curvilinea più gradevole all'occhio.

175. La ellisse può venire impiegata dal vetraio nella forma dei cristalli, dal fabbro nella sagoma delle armature, nelle ringhiere e nelle cancellate, dal calderaio e dal lattaio nei fondi dei recipienti, dal giardiniere nella figura dei pratelli, delle aiuole, delle canestre dei fiori.

Il tornitore, l'intarsiatore, l'orafo, il lapidario impiegheranno la ellisse secondo il gusto dell'arte propria per ornarne o dar la forma ai loro prodotti, come anelli, vasi, medaglioni, braccialetti, pietre dure e preziose. In generale le arti ponno applicare la ellisse per dar forma ai prodotti industriali secondo

il gusto e la moda, o come semplice oggetto di ornativa delle loro opere, o per servire nelle costruzioni a condizioni di comodo e di solidità. Per ogni modo gli è necessario di saper costruire la curva di cui in seguito insegneremo le regole, a seconda dei diversi casi che si possono presentare nella pratica.

176. Chiunque si faccia ad osservare gli astri brillanti che popolano il firmamento, è capace di notare che sorgono da oriente sul nostro orizzonte per tramontare ad occidente, e che in questo movimento conservano la stessa posizione relativa. Ma l'attento osservatore, specialmente con occhio armato di lenti, ne distingue alcuni che differiscono, e per luce diversa e per fisiche apparenze, e per cambiar di luogo rispetto agli altri. I primi si chiamano *stelle fisse*, i secondi *planeti*. Il maggior degli astri che più colpiscono i nostri sensi, il Solc, non è che una stella fissa, e la Terra da noi abitata, la Luna, Venere, conosciuta volgarmente col nome di *stella mattutina* o *stella vespertina*, non sono che planeti.

Le stelle fisse al pari del grande astro brillano di luce propria; i planeti poi sono corpi opachi, e ci riflettono la luce ricevuta dal sole. I planeti si dividono in tre classi, planeti *primari*, planeti *secondari*, e *comete*, ed insieme col sole formano il nostro sistema planetario. Per lungo tempo si è creduto con Tolomeo che la Terra fosse fissa, ed il sole ed i planeti si aggirassero intorno a lei in circoli concentrici; ma Copernico richiamando l'ipotesi antica di Pitagora sul sistema del mondo, riuscì a spiegare rigorosamente tutti i fenomeni celesti, collocando il sole nel centro intorno al quale si rivolgono la Terra e gli altri planeti, come oggidì senza contrasto è ritenuto <sup>1</sup>

<sup>1</sup> Niccolò Copernico nato in Thorn in Prussia nel 1472, canonico di Watzelvod in Polonia, è stato il rigeneratore della Astronomia fisica. A 70 anni, ad istigazione del cardinale Schonbergh, si indusse a pubblicare il suo sistema (*De motu octavarum spherarum*) che uscì in luce in Norimberga nel 1543. L'invidia, la superstizione e l'intrigo non mancarono di sollevare le più vive opposizioni contro l'Astronomo Prus-

Or bene, nel sistema Copernicano girano intorno al sole i pianeti primari, che sono secondo l'ordine della loro distanza dal grand'astro Mercurio, Venere (*stella mattutina e vespertina*), la Terra, Marte, gli Asteroidi, <sup>1</sup> Giove, Saturno, Urano e Nettuno.

siano, e gli tolsero la sodisfazione di veder trionfare la sua dottrina. Il solo gesuita Riccioli fu capace contro 49 argomenti favorevoli al sistema copernicano di opporre 77, i quali si riducono in sostanza a quello già proposto dallo stesso Tolomeo, cioè che se la Terra si movesse intorno al sole, i corpi lanciati fuori della sua superficie non cadrebbero nello stesso luogo, senza accorgersi che i corpi terrestri partecipano del moto della Terra e girano con essa. L'unica opposizione di rilievo che trovò il sistema di Copernico, fu fatta quasi un secolo dopo dal celebre astronomo Danese Ticone Brahe col suo nuovo sistema. Questo è analogo al sistema Tolemaico, e suppone che il sole giri intorno alla Terra mentre gli altri pianeti girano intorno al sole in tempi periodici. Ma il Galileo in mezzo alle persecuzioni sostenne il moto della Terra, e dappoi la semplicità del sistema di Copernico trionfò su le altre ingegnose quanto complicate teorie dei sistemi del mondo.

<sup>1</sup> Gli Asteroidi sono piccoli pianeti osservabili soltanto con i migliori canocchiali, e si dicono ancora pianeti *minori* per distinguerli dal rimanente dei primari che diconsi *maggiori*. Rappresentando con 40 la distanza della Terra dal sole, le medie distanze dei pianeti si possono rappresentare presso a poco nel modo seguente :

1° per Mercurio . . . . .	$4 = 4 + 0 \cdot 4^0$	} in circa
2° per Venere . . . . .	$7 = 4 + 3 \cdot 2^0$	
3° per la Terra . . . . .	$10 = 4 + 3 \cdot 2^1$	
4° per Marte . . . . .	$15 = 4 + 3 \cdot 2^2$	
5° per Giove . . . . .	$52 = 4 + 3 \cdot 2^3$	
6° per Saturno . . . . .	$95 = 4 + 3 \cdot 2^4$	
7° per Urano . . . . .	$192 = 4 + 3 \cdot 2^5$	

Alla quale legge sodisfa pure la distanza di Nettuno ultimo fra i pianeti maggiori scoperto ai nostri giorni. La discontinuità però che si manifesta fra i termini 4° e 5° di questa serie, ed il riflesso che la natura non altera l'armonia delle operazioni, fece sospettare agli astronomi l'esistenza di un altro pianeta, la cui distanza media dal sole fosse di  $28 = 4 + 3 \cdot 2^3$ . Infatti il padre Piazzi il primo scoprì Cerere nel 4° gennaio 1801, e nei sei susseguenti anni furono scoperti, Pallade Giuione e Vesta. Questi quattro pianeti cadono fra Marte e Giove, conservano presso a poco la medesima distanza media dal sole, ed i piani ove descrivono il loro cammino si incontrano all'incirca negli stessi punti del cielo stellato. Queste circostanze fecero concepire al celebre Olbers

ed i pianeti secondari o satelliti girano in modo analogo intorno ai loro pianeti primari. Così alla terra gira intorno la luna, Giove è centro di quattro satelliti, a Saturno fan corona otto satelliti, ed un disco annulare sottile ed opaco, che per avere il suo piano inclinato sulla retta che unisce il centro di questo pianeta con quello della terra, apparisce nei telescopi sotto forma ellittica. Urano è circondato da sei satelliti, ed a Nettuno ne gira intorno uno. <sup>1</sup> I pianeti rotando sul proprio asse con moto diurno descri-

l'ardita ipotesi che originariamente esistesse fra Marte e Giove un solo pianeta di massa e volume agli altri comparabile che, o per una forza interna esplosiva, o per un possente urto di qualche cometa sia stato ridotto in frantumi, i quali animati dalla forza d'attrazione del sole e dalla nuova forza di proiezione, abbiano preso a descrivere nuove curve intorno al sole in piani tali, che tagliar si doveano evidentemente nei contorni della separazione. Non vi fu ipotesi al certo coronata da più felici successi, poichè colle costanti osservazioni dirette nei punti del cielo ove passar devono questi frammenti planetari nelle epoche date, ne sono stati scoperti altri 38 dall'8 dicembre 1847 al 23 maggio 1856. I quarantadue pianeti minori, distinti col numero d'ordine della loro scoperta, secondo l'ordine di distanza dal sole, sono :

(8) Flora	(24) Lutezia	(34) Circe
(40) Armonia	(19) Fortuna	(38) Leda
(18) Melpomene	(41) Partenope	(36) Atlante
(42) Vittoria	(17) Teti	(39) Letizia
(27) Euterpe	(29) Anftrite	(1) Cerere
(4) Vesta	(13) Egeria	(2) Pallade
(30) Urania	(5) Astrea	(28) Bellona
(7) Iride	(32) Pomona	(33) Polimnia
(9) Meti	(44) Irene	(35) Leucotea
(44) Dafne	(23) Talia	(22) Calliope
(24) Focea	(15) Eunomia	(16) Psiche
(20) Massalia	(37) Fides	(25) Temi
(42) Iside	(26) Proserpina	(10) Igea
(6) Ebe	(3) Giunone	(34) Eufrosina.

Forse altri ne esistono, che l'avvenire e l'insistenza degli osservatori ci sveleranno, e forse alcuni altri si sono cangiati in comete, come è stato dimostrato potere accadere.

<sup>1</sup> Oggi si contano otto pianeti maggiori, e quarantadue minori, ossia cinquanta pianeti primari, e venti satelliti o pianeti secondari.

vono con moto annuo o di rivoluzione delle curve piane rientranti, che si dicono *orbite*. I piani delle orbite sono più o meno inclinati su quello della terra, e tutti i pianeti si aggirano presso a poco dentro la zona celeste chiamata *zodiaco*. Le sole comete non soffrono la legge di questo recinto, ma invadono il cielo in qualunque parte. <sup>1</sup> Pertanto in questa stupenda armonia delle sfere celesti il Kepler scoprì la natura delle orbite dei pianeti, e stabili che erano *ellittiche*. Il sole occupa un *fuoco* comune delle ellissi descritte dai pianeti primari, ognuno dei quali è collocato nel fuoco comune delle ellissi descritte dai suoi rispettivi pianeti secondari. <sup>2</sup> La luna non descrive intorno alla terra una vera e propria ellisse, perchè il suo moto viene turbato dalla attrazione del sole in ragione delle variazioni dipendenti dalla posizione della luna rispetto al sole. Le orbite delle comete sono ellissi molto allungate, la cui forma può paragonarsi ad una spola dentro la quale il sole si trova vicinissimo ad una estremità, ma per la infinita lunghezza dell'asse nel calcolo dei suoi elementi vengono considerate generalmente come paraboliche.

e così settanta pianeti conosciuti, senza contare il numero considerevole di comete scoperte e calcolate, formano insieme col sole il nostro sistema planetario. Le innumerevoli stelle del firmamento, che brillano a guisa di soli, sono eglino altrettanti centri di sistemi planetari particolari? Questa ipotesi non ripugna alla nostra ragione, che non vede limiti nella onnipotenza del Creatore.

<sup>1</sup> Anco i pianeti minori non si aggirano entro quel limite, ma ciò non è contrario alle leggi armoniche del sistema planetario, poichè l'ipotesi di Olbers, già da noi riferita, spiega chiaramente le circostanze che gli rendono inosservanti di quelle leggi.

<sup>2</sup> Il Kepler mentre il Galileo contemporaneamente fondava la teoria del moto in generale, stabiliva le tre leggi su cui è basata la moderna astronomia cioè: 1° che i pianeti si muovono in ellissi, di cui il sole occupa uno dei fuochi; 2° che il raggio vettore di una stessa orbita che va dal sole al pianeta, descrive sempre nello stesso tempo superficie uguali; 3° che i quadrati dei tempi delle rivoluzioni sono proporzionali ai cubi degli assi maggiori delle orbite.



**Tangenti e Normali** — 177. Primieramente vogliasi condurre la tangente ad un punto  $M$  (fig. 416) preso sulla curva, di cui sono noti l'asse maggiore ed i fuochi. Si prolunghi uno dei

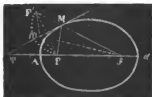


Fig. 116.

raggi vettori  $fM$  di una lunghezza  $MF'$  uguale all'altro raggio  $MF$ ; ed uniti i punti  $F, F'$ , da  $M$  si conduca sopra  $FF'$  la perpendicolare  $MT$ , che dividerà in mezzo l'angolo  $FMF'$  e la  $FF'$ , ed avrà ogni suo punto ugualmente distante da  $F$  e da  $F'$ . Se sopra  $MT$  si prende un punto qualunque  $m$  diverso da  $M$ , e da esso si conducano le rette  $mf, mF, mF'$ , siccome  $mF = mF'$ , sarà  $mf + mF = mf + mF'$ : ma la linea spezzata  $mf + mF'$  è maggiore della intera  $fF'$ , e questa per la costruzione fatta è uguale all'asse maggiore  $aA$  (§ 472): Dunque la somma  $mf + mF$  è maggiore dell'asse  $aA$ ; perciò il punto  $m$  non può cadere sulla curva. Così potendo dimostrare altrettanto per ogni altro punto, la retta  $MT$  toccherà la curva nel solo punto  $M$ ; dunque per condurre la tangente  $MT$  ad un punto  $M$  della ellisse, di cui sono noti l'asse maggiore ed i fuochi, si prolunga un raggio  $Mf$  quanto

è lungo l'altro  $MF$ , e si conduce dal punto  $M$  sopra la retta di unione  $FF'$  la perpendicolare  $MT$ .



Fig. 117.

178. Se i fuochi non fossero determinati, allora si unisca il punto  $M$  (fig. 417) con i vertici  $a, A$ , e da un vertice  $A$  si elevi sull'asse  $aA$  una perpendicolare  $AR$  fino che incontra in  $R$  il prolungamento della  $aM$ , che parte dall'altro vertice  $a$ , e pel punto di mezzo  $O$  di  $AR$  si tiri  $MO$ . Una retta qualunque  $rp$  condotta parallelamente all'ordinata  $MP$  taglia la  $AM$  in  $o$ , la curva in  $m$  e la  $MO$  in  $u$ , e dai triangoli simili  $MPA, opA$ , e dai triangoli

pur simili  $MPa$ ,  $rpa$  avremo le proporzioni

$$MP : op :: AP : Ap$$

$$MP : rp :: aP : ap,$$

le quali moltiplicate insieme daranno

$$\overline{MP}^2 : rp \times op :: aP \times AP : ap \times Ap ;$$

ma per una delle proprietà dimostrate (§ 467) abbiamo

$$\overline{MP}^2 : \overline{mp}^2 :: aP \times AP : ap \times Ap$$

dunque avremo  $\overline{MP}^2 : rp \times op :: \overline{MP}^2 : \overline{mp}^2 ;$

e quindi poichè gli antecedenti sono uguali, avremo  $rp \cdot op = \overline{mp}^2$  ossia  $rp : mp :: mp : op$ . Da questa proporzione poi si rileva che  $rp - mp : mp :: mp - op : op$ , la quale, per essere  $rp - mp = mr$ ,  $mp - op = mo$ , diviene  $mr : mp :: mo : op$ . Ma l'intera ordinata  $mp$  è maggiore della sua porzione  $op$ , dunque avremo la parte esterna  $mr$  maggiore della interna  $mo$ , e quindi chiaro apparisce che il doppio di  $mr$  è maggiore di  $mo + mr$ , ossia di  $or$ . Ora poichè la retta  $MO$  condotta per il mezzo  $O$  di  $AR$  divide la parallela  $or$  per metà, avremo  $or = 2nr$ ; ma  $2mr$  è maggiore di  $or$ , dunque  $2mr$  maggiore di  $2nr$ , ossia anco  $mr$  è maggiore di  $nr$ ; perciò il punto  $n$  è fuori della curva: e lo stesso potendo dirsi di ogni altro punto di  $MO$  diverso da  $M$  preso anche nel suo prolungamento, perciò la retta  $MO$  toccherà la curva nel solo punto  $M$ . Dunque *dato l'asse maggiore della ellisse, si conduce la tangente  $MT$  ad un punto  $M$  della curva elevando da un vertice  $A$  una perpendicolare  $AR$  fino che incontra la retta  $aM$  condotta dall'altro vertice, e facendo passare per  $M$  e pel punto di mezzo  $O$  di  $AR$  la retta  $MO$ . Se invece fosse dato soltanto l'asse minore, si riferirà la costruzione ad esso, e con simile ragionamento si stabilirà la regola analoga, che crediamo inutile ripetere e dimostrare, rilasciandolo all'esercizio degli studiosi sulla semplice ispezione della figura*

179. Se ritenuta la stessa costruzione si prolunga la  $MO$  (fig. 118) fino che incontra in  $T$  il prolungamento dell'asse maggiore  $aA$ , dai triangoli simili  $MPT$ ,  $OAT$  avremo  $MP:OA::PT:AT$ ; ma dai triangoli simili  $MPa$ ,  $RAa$  avendo  $MP:RA::aP:aA$ , ed essendo  $C$  il centro della ellisse, ed  $RA=2.OA$ ,  $aA=2.CA$  abbiamo  $MP:OA::aP:CA$ ; dunque avremo  $aP:CA::PT:AT$ . Inoltre decomponendo si ottiene

$$aP - CA : CA :: PT - AT : AT$$

ovvero

$$CP : CA :: AP : AT;$$

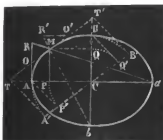


Fig. 118.

ma un antecedente sta al conseguente come la somma degli antecedenti sta ai conseguenti; Dunque  $CP:CA::CA:CT$ , cioè per condurre la tangente ad un punto  $M$  della ellisse, dato l'asse maggiore, si abbassa l'ordinata  $MP$ , e riportata una terza proporzionale  $CT$  fra il segmento  $CP$  ed il semiasse maggiore  $CA$  dal centro  $C$  in  $T$ , la retta  $MT$  condotta per  $M$  e  $T$  sarà la tangente richiesta <sup>1</sup>. Se come nella regola

<sup>1</sup> Volendo determinare geometricamente la  $CT$ , si descriva col semiasse maggiore  $CA$  l'arco  $AmB'$  (fig. 119), e si prolunghi l'ordinata  $MP$  condotta pel punto dato  $M$  fino che incontra l'arco in  $m$ , e condotta al raggio  $Cm$  la perpendicolare  $mT$ , avremo  $CT$  terza proporzionale richiesta. Infatti i triangoli simili  $CPm$ ,  $CmT$  danno

$$CP : Cm :: Cm : CT;$$

ossia, per essere  $Cm = CA$ , avremo

$$CP : CA :: CA : CT;$$



Fig. 119.

In modo analogo si opererà relativamente all'asse minore. Volendo un processo più breve per determinare la  $CT$ , si conduca pel centro  $C$  una retta qualunque  $CA'$  (fig. 118), e coi raggi  $CP$ ,  $CA$  si descrivano gli ar-

precedente è dato solamente l'asse minore, si procederà relativamente ad esso e sulla ispezione della figura con una costruzione e con considerazioni analoghe a quelle fatte relativamente all'asse maggiore (§ 178).

180. Nella pratica l'artista può avere in qualche caso bisogno di condurre una tangente all'ellisse da un punto situato fuori della curva. Se unito un punto  $n$  preso fuori della curva ad uno dei fuochi  $F$  (fig. 120) con la retta  $nF$ , si descriva col centro in  $n$  e col raggio  $nF$  un arco di cerchio  $FR$ , questo



Fig. 120.

sarà tagliato in un punto  $R$  da un secondo arco di cerchio  $Rr$  descritto col centro nell'altro fuoco  $f$ , e con un raggio uguale all'asse maggiore  $aA$ . Condotta la  $fR$ , si tiri pel punto di incontro  $M$  colla curva il raggio vettore  $MF$ ; siccome  $fM+MF=aA$  (§ 172) e per costruzione  $fM+MR=fR=aA$ .

sarà  $MF=MR$ ; ma pei punti  $M, n$  facendo passare la retta  $Mn$  ogni suo punto è ugualmente distante da  $F$  ed  $R$ ; dunque la retta  $Mn$  è perpendicolare ad  $FR$ , e perciò è tangente nel punto  $M$  (§ 177).  
Cioè per condurre la tangente  $nM$  da un punto dato  $n$  fuori della ellisse, di cui sono noti l'asse maggiore ed i fuochi, si determina l'intersezione  $R$  di due archi di cerchio descritti coi centri  $n, f$  e coi raggi  $nF$  e  $aA$ ; ed il punto  $M$  ove la retta  $fR$  taglia la curva sarà il punto di contatto, da unirsi in fine col dato  $n$ . È da osservarsi che gli archi che determinano il punto  $R$  avendo i

chi  $PP', AA'$ , che taglieranno la  $CA'$  in  $P'$  ed  $A'$ , si tiri  $AP'$  e dal punto  $A'$  la  $A'T$  parallela ad  $AP'$ , il punto  $T$  sarà quello d'incontro della tangente coll'asse: infatti le parallele  $AP', TA'$  danno

$$CP' : CA' :: CA : CT$$

ovvero

$$CP : CA :: CA : CT.$$

E lo stesso si dirà rapporto all'asse minore.

loro centri  $f, n$  ad una distanza  $fn$  sempre minore della somma dei raggi  $fR + Rn$ , devono tagliarsi in due punti  $R, r$ ; perciò si possono sempre condurre due tangenti distinte  $nM, nm$  da un punto dato  $n$  preso fuori della ellisse.

181. Da ciò che abbiamo esposto rispetto alle tangenti rimettiamo all'esercizio degli studiosi il farsi ragione della soluzione del seguente problema, che può presentarsi nella pratica.

PROBLEMA. Condurre alla ellisse una tangente parallela ad una retta data  $pq$ , o perpendicolare ad una retta data  $sv$  (fig. 420).

SOLUZIONE. Determinati i fuochi  $F, f$ , da uno di essi  $F$  si faccia passare una retta  $FR$  perpendicolare alla retta  $pq$  nel primo caso, e parallela alla retta  $sv$  nel secondo; si descriva poi un arco  $Rr$  col centro nell'altro fuoco  $f$  e col raggio uguale all'asse maggiore: quest'arco taglierà la retta  $FR$  in un punto  $R$ , e quindi la  $fR$  taglierà la curva in un punto  $M$ . Finalmente la  $MO$  che si faccia passare pel punto  $M$ , e pel punto di mezzo  $O$  della  $FR$ , sarà la tangente richiesta.

182. Il saper condurre le tangenti all'ellisse è importante sopra tutto per determinare le normali di questa curva, o per verificare le loro posizioni; ed in generale l'operazione si riduce ad elevare delle perpendicolari sulle tangenti dai loro punti di contatto. Sia frattanto  $Tt$  la tangente d'una ellisse (fig. 421),



Fig. 421.

ed  $MN$  la perpendicolare elevata sopra  $Tt$  dal punto di contatto  $M$ . Prolungati i raggi vettori  $fM, FM$  del punto  $M$ , e la normale  $MN$  al di fuori della curva, già sappiamo che la tangente  $MT$  (§ 477) divide per metà gli angoli  $FMF', fMf'$ ; cioè abbiamo  $ang. FMT = ang. F'MT$ ,

$ang. fMt = ang. f'Mt$ , ma la geometria ci insegna che i complementi d'angoli uguali sono uguali; dunque

$$ang. fMN = ang. FMN, \quad ang. f'Mn = ang. F'MN :$$

cioè, la normale MN divide per metà l'angolo  $\angle MF$  formato dai raggi vettori  $fM$ ,  $FM$  prolungati l'una e gli altri anco esternamente alla curva; perciò, si conduce la normale da un punto preso sulla ellisse di cui sono noti l'asse ed i fuochi, dividendo per metà l'angolo formato dai raggi vettori del punto dato.

483. Nella costruzione degli archi e delle volte non solo questa curva si presta ad ogni rapporto della corda alla saetta come abbiamo indicato (§ 474), ma ancora soddisfa alla condizione generalmente richiesta, che i piedritti verticali risultino tangenti alle estremità dell'asse maggiore situato orizzontalmente. La necessità già da noi avvertita di saper condurre le tangenti e le normali ad una curva (§§ 33, 425) per determinare la vera direzione delle superficie di contatto dei cunei degli archi e delle volte, non minore si rende riguardo alla ellisse, che così spesso viene impiegata. Per costruire un arco ellittico a sesto scemo  $ABa$  (fig. 422), ovvero a sesto rialzato  $BAb$  (fig. 423) ordinariamente si pratica di riportare sull'asse maggiore le distanze

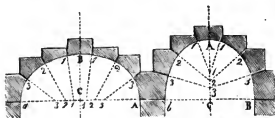


Fig. 422.

Fig. 423.

$C1, C2, C3$  ec. proporzionali a quelle determinate dalle normali condotte nel disegno, e dai punti di divisione 1,

2, 3 ec. dell'arco di tirare delle corde 11, 22, 33 ec., che vengono a rappresentare le direzioni delle linee di contatto dei cunei. I costruttori avvertiranno di non riferire le normali all'asse minore della curva, onde evitare la confusione che arrecherebbero le loro scambievoli intersezioni, e perchè a misura che si conducessero dal vertice verso le imposte, o viceversa verrebbero a tagliarlo a distanze troppo grandi dal centro C. Nelle costruzioni delle volte essendo impedito dalle armature

delle centine di operare internamente alla curva, si tireranno delle corde che stieno a rappresentare le direzioni delle tangenti, e quindi facendo combaciare il lato di una squadra con ciascuna di esse, e di cui il vertice coincida coi punti di contatto, avremo tutte le direzioni delle normali esterne alla curva (§ 125 nota 4).

Poichè la fisica insegna che l'angolo d'incidenza è uguale a quello di riflessione, dalla proprietà della normale di divider per metà l'angolo formato dai raggi vettori (§ 182), si rileva che i corpi elastici lanciati da un fuoco  $F$  (fig. 121) verso un punto  $M$  della ellisse si riflettono nell'altro fuoco  $f$ . Con questi principii si spiega il fenomeno che si nota in una stanza costruita colle pareti in forma ellittica, ove due persone poste nei fuochi della figura possono intendersi parlando anco sotto voce, mentre non sono intese da chi sia situato fuori di essi. <sup>1</sup>

<sup>1</sup> Queste stanze diconsi *gabinetti parlanti*. Tale è il coro di S. Cosma e Damiano di Roma, la sala del palazzo regio di Piacenza, la Galleria di San Paolo di Londra, quella di Gloucester, ove due persone parlando a voce bassa si intendono ad una distanza di braccia 83,5 circa (tese 25), la cattedrale di Girgenti in Sicilia, e la Grotta della Favella nelle cave di Siracusa.

## LEZIONE DECIMA.

*Diametri. — Rapporti di posizione fra i diametri e le tangenti. — Determinazione degli elementi ellittici.*

**Diametri.** — 184. Le proprietà geometriche, che abbiamo esposte nella precedente lezione, non sono le sole di cui gode la ellisse: altre ve ne hanno che conducono a considerazioni ed applicazioni non meno importanti, che ora noi siamo in grado di apprendere dietro l'acquistata cognizione di quelle. Ad ugual distanza  $CO = Co$  dal centro  $C$  della ellisse  $ABab$  (fig. 124)



Fig. 124.

si conducano due corde  $DD'$ ,  $dd'$  qualunque, parallele all'asse minore  $Bb$ , ossia perpendicolari all'asse maggiore  $Aa$ , e si uniscano le estremità opposte  $D, d$  col centro  $C$ . Ora i triangoli  $COD$ ,  $CoD$  sono uguali, imperocchè hanno gli angoli  $DOC$ ,  $doC$  uguali per esser retti, i lati  $DO$ ,  $do$  uguali per essere la curva uguale e simmetrica intorno agli assi (§ 404, 470, 2°), e quindi come metà di due corde simmetriche, ed i lati  $CO$ ,  $Co$  uguali per costruzione; in conseguenza anco gli altri tre elementi sono uguali: cioè, gli angoli  $OCD$ ,  $oCd$  sono uguali, ed uguali i lati  $CD$ ,  $Cd$ : ma essendo  $aA$  una linea retta, sappiamo dalla Geometria elementare che gli angoli  $OCD$ ,  $oCd$  opposti al vertice non possono essere uguali senza che ambedue le linee



che gli formano sieno rette; dunque la linea  $DCd$  è una linea retta, la di cui metà si trova nel centro della ellisse; <sup>1</sup> perciò, ogni corda condotta pel centro della ellisse rimane da esso divisa in due parti uguali.

185. Tutte le corde che passano per il centro della ellisse si chiamano genericamente *diametri*. Ed è chiaro che tutti i diametri, sebbene divisi per metà dal centro, non hanno come nel circolo la medesima lunghezza, ma abbiamo un numero infinito di coppie di diametri uguali corrispondenti alle estremità di due corde parallele all'asse maggiore o minore, e situate ad ugual distanza dal centro, le quali sono le diagonali di un rettangolo  $DD'dd'$  formato dalle corde parallele. Se pel centro  $C$  della ellisse (fig. 124) si fa passare il diametro  $Ee$  parallelo alla tangente  $TDt$  condotta ad una delle estremità  $D$  di un diametro  $Dd$ , i due diametri  $Dd$ ,  $Ee$  congiunti da tal relazione si dicono *diametri coniugati*. Gli assi non sono che due diametri coniugati, ed il minore è il più corto, il maggiore il più lungo fra tutti i diametri che si possono condurre nella ellisse. Finalmente uno dei diametri coniugati si può prendere per asse delle ascisse, l'altro per quello delle ordinate e viceversa: così la  $PM$  condotta da un punto qualunque  $M$  della curva sul diametro  $Dd$ , e parallela alla tangente  $Tt$ , ossia al rispettivo diametro coniugato  $Ee$ , è l'ordinata ed i segmenti  $DP$ ,  $Pd$  le ascisse al diametro  $Dd$ .

186. Nella ellisse  $ADad$  (fig. 125 e 126) abbiassi una corda qualunque  $Mm$  parallela alla tangente  $DT$  condotta alla estremità del diametro  $Dd$ . Dal punto di contatto  $D$ , e dalle estremità  $M$ ,  $m$  della corda si abbassino sull'asse maggiore  $Aa$  le normali  $DQ$ ,  $MP$ ,  $mp$ , e si prolunghino fino che incontrano nei punti  $B$ ,  $N$ ,  $n$  la

<sup>1</sup> Se invece si fossero condotte le corde  $Dd'$ ,  $D'd$  parallelamente all'asse maggiore colle distanze uguali  $CO$ ,  $Co'$  prese sull'asse minore, tirate pure dalle estremità opposte  $D$ ,  $d$  le rette  $CD$ ,  $Cd$  si otterrebbe due triangoli  $CO'D$ ,  $Co'd$  coi quali si dimostrerebbe in ugual modo la medesima cosa.

circonferenza  $ABab$  descritta sull'asse  $Aa$  come diametro; dipoi si conduca pei punti  $T$  e  $B$  la retta  $TB$ , che sarà perpendicolare al raggio  $CB$  (§ 179 nota 1), ed infine si tiri nel cerchio la corda  $Nn$ , e pei punti d'intersezione  $O$ ,  $R$  si conduca la  $OR$ . Ora poichè le ordinate dell'ellisse sono proporzionali a quelle del circolo (§ 171), avremo  $MP : mp :: NP : np$ , da cui si rileva che le corde  $Mm$ ,  $Nn$  prolungate incontrano (*fig. 125*) o tagliano (*fig. 126*) l'asse nel medesimo punto  $S$ ; inoltre avremo  $DQ : MP :: BQ : NP$ , ma essendo

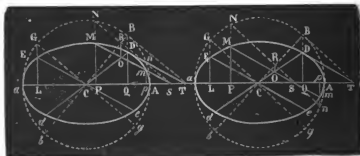


Fig. 125.

Fig. 126.

$DT$ ,  $Mm$  parallele fra loro, dai triangoli simili  $DQT$ ,  $MPS$  abbiamo  $DQ : MP :: QT : PS$ , dunque avremo  $BQ : NP :: QT : PS$ , ed in conseguenza i triangoli  $NPS$ ,  $BQT$  debbono esser simili, e poichè i lati  $NP$ ,  $BQ$  sono paralleli, ed i lati  $PS$ ,  $QT$  coincidono nella stessa direzione, gli altri due lati, ossia la corda  $Nn$  e la tangente  $BT$  del circolo  $ABab$  sono parallele fra loro.

Ciò premesso, essendo le rette  $CD$ ,  $CT$  tagliate dalle parallele  $Mm$ ,  $DT$ , avremo  $CO : OD :: CS : ST$ ; ma  $CB$ ,  $CT$  essendo tagliate parimente dalle parallele  $Nn$ ,  $BT$ , abbiamo

$$CR : RB :: CS : ST;$$

dunque

$$CO : OD :: CR : RB,$$

la quale mostra che  $OR$  è parallela a  $BD$ . Finalmente poichè le corde  $Mm$ ,  $Nn$  sono tagliate dalle  $NM$ ,  $RO$ ,  $nm$  parallele fra loro.

avremo  $NR : Rn :: MO : Om$ ; ma il raggio  $CB$  essendo perpendicolare alla tangente  $BT$ , e quindi alla secante  $NS$ , divide la corda  $Nn$  per metà, ossia da  $NR = Rn$ ; dunque anco  $MO = Om$ , cioè la  $Mm$  è divisa nel mezzo dal punto  $O$ ; perciò, un *diametro della ellisse divide per metà tutte le corde parallele alla tangente condotta ad una delle sue estremità.*<sup>1</sup>

187. Due corde qualunque  $Mm$ ,  $Nn$  (fig. 127) condotte per due punti  $R$ ,  $S$  dell'asse maggiore o minore ugualmente distanti dal centro  $C$  sono della medesima lunghezza. Questo principio



Fig. 127.

può dimostrarsi col metodo di sovrapposizione. Infatti: si tagli l'ellisse lungo l'asse  $Aa$ , e si rovesci la metà  $Aba$  in modo che il punto  $b$  restando fisso,  $A$  cada in  $a$  e viceversa, e le rette  $nS$ ,  $mR$ ,  $dC$  prendano le posizioni di  $n'R$ ,  $m'S$ ,  $d'C$ ; dipoi si

rivolga la parte inferiore così rovesciata sulla superiore. Siccome gli angoli  $MRS$ ,  $nSR$  sono uguali perchè alterni interni fra le parallele  $Mm$ ,  $Nn$ , e gli assi dividono simmetricamente la curva, le  $n'R$ ,  $m'S$ ,  $d'C$  combaceranno rispettivamente colle  $MR$ ,  $NS$ ,  $DC$ , ed i punti  $n'$ ,  $m'$ ,  $d'$  caderanno in  $M$ ,  $N$ ,  $D$ , e sarà  $mR = SN$ ,  $RM = nS$  perciò  $Mm = Nn$ . Ed in conseguenza anco le corde  $MN$ ,  $mn$  saranno parallele ed uguali, ed il quadrilatero  $MNnm$  sarà un parallelogrammo. Tagliando poi la ellisse secondo il diametro  $Dd$ , e procedendo ad una sovrapposizione analoga, è facile di convincersi che ogni diametro  $Dd$  divide la ellisse in due parti uguali  $DMNd$ ,  $dnmD$  disposte in situazione contraria.

188. Quel poco che abbiamo detto sopra i diametri ci pone

<sup>1</sup> Se invece avessimo descritta la circonferenza coll'asse minore per diametro, al quale si fosse riferita la costruzione, con un ragionamento analogo saremmo giunti alla stessa dimostrazione. Crediamo però che quella che abbiamo data basti per persuadere i principianti della verità della proposizione, e l'altra la rilasciamo agli studiosi per loro esercizio.

in grado di risolvere il problema sulla ricerca degli elementi della ellisse, utile in tante operazioni delle arti.

**PROBLEMA.** *Data una ellisse ABab (fig. 128) trovarne il centro, gli assi, i fuochi, ed il parametro.* Si conducano due corde parallele qualunque Mm, Nn, e pei punti di mezzo P, O si faccia passare la corda Dd, che sarà un diametro (§ 186). Il punto di mezzo C di esso sarà il centro della ellisse (§ 184).



Fig. 128.

Le intersezioni F, f sull'asse Aa di un arco descritto col centro in B e col raggio  $CA = Ca$  saranno i fuochi (§ 166), e finalmente la corda Rr che passa per uno dei fuochi sarà il parametro (§ 169). Agli studiosi la cura di trovare la spiegazione di queste operazioni.

**Rapporti di posizione fra i diametri e le tangenti.** — 189. Se da un punto qualunque M della ellisse DEde (fig. 129) si conduce la tangente MT fino che incontra in T il prolungamento di un diametro Dd, e si tira la corda Mm parallela al suo coniugato Ee, la geometria dimostra, come noi abbiamo dimostrato rispetto agli assi,

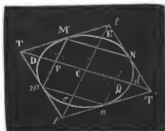


Fig. 129.

che  $CT : CD :: CD : CP$ , cioè CT è terzo proporzionale dopo il semidiametro CD ed il segmento CP.<sup>1</sup> Ma questa proporzione si ve-

<sup>1</sup> Ecco il modo più semplice che ho raggiunto per dimostrare questa proposizione. Primieramente, ritenute le stesse cose del § 186, e la me-

rifica per la stessa ragione anco rispetto ad una seconda tangente  $mT$  condotta all'altra estremità  $m$  della corda; dunque,

desima costruzione delle figure 125, 126, dai semidiametri  $CD$ ,  $CB$  tagliati dalla  $OR$  nei punti  $O$ ,  $R$ , abbiamo

$$\overline{CD}^2 = (CO + OD)^2 = \overline{CO}^2 + OD(2CO + OD)$$

$$\overline{CB}^2 = (CR + RB)^2 = \overline{CR}^2 + RB(2CR + RB),$$

ed osservando che  $OD = Dd - Od$ , ed  $RB = Bb - Rb$ , sostituendo e

riducendo avremo  $\overline{CD}^2 = \overline{CO}^2 + OD \cdot Od$

$$\overline{CB}^2 = \overline{CR}^2 + RB \cdot Rb$$

e quindi

$$(1) \quad \begin{cases} \overline{CD}^2 - \overline{CO}^2 = OD \cdot Od \\ \overline{CB}^2 - \overline{CR}^2 = RB \cdot Rb \end{cases}$$

Se inoltre si conduce il diametro coniugato  $Ee$  parallelo alla tangente  $DT$ , e dall'estremo  $E$  si fa passare la  $GL$  parallela alle ordinate  $MP$ ,  $DQ$ ,  $mp$  e si tira il diametro  $Gg$ , poichè  $CE$  è parallela a  $DT$ , e quindi a  $MS$ , e le  $EL$ ,  $MP$  sono proporzionali alle  $GL$ ,  $NP$  (§ 171), sarà  $Gg$  parallelo alla tangente  $BT$ , o ad  $NS$ , e perciò i triangoli  $NSM$ ,  $GCE$  sono simili e daranno  $GC : NS :: EC : MS$ ; ma  $RO$  essendo parallela ad  $MN$  abbiamo  $NR : NS :: MO : MS$ ; dunque avremo  $GC : NR :: EC : MO$ , e quindi siccome  $GC = CB$  avremo

$$(2) \quad \overline{CR}^2 : \overline{NR}^2 :: \overline{EC}^2 : \overline{MO}^2.$$

Premesso tutto ciò, essendo  $RO$  parallela a  $DB$ , avremo  $CD : CO :: CB : CR$ ,

che si riduce a  $\overline{CD}^2 : \overline{CO}^2 :: \overline{CB}^2 : \overline{CR}^2$ ,

e da questa decomponendo otterremo

$$\overline{CD}^2 : \overline{CD}^2 - \overline{CO}^2 :: \overline{CB}^2 : \overline{CB}^2 - \overline{CR}^2,$$

ove ponendo invece delle differenze dei quadrati i rettangoli dati dalle espressioni (1) avremo

$$\overline{CD}^2 : OD \cdot Od :: \overline{CB}^2 : RB \cdot Rb:$$

ma dalla ordinata  $NR$  della circonferenza  $ABab$  abbiamo  $RB \cdot Rb = \overline{NR}^2$ ;

Dunque avremo  $\overline{CD}^2 : OD \cdot Od :: \overline{CB}^2 : \overline{NR}^2$ :

due tangenti  $MT$ ,  $mT$  condotte alle estremità di una corda qualunque  $Mm$  si incontrano nello stesso punto  $T$  del prolungamento del

e perciò col confronto della proporzione (2) avremo

$$\overline{CD}^2 : OD \cdot Od :: \overline{EC}^2 : \overline{MO}^2,$$

ossia permutando (3)  $\overline{MO}^2 : OD \cdot Od :: \overline{EC}^2 : \overline{CD}^2$ ,

cioè, il quadrato di una ordinata ed il rettangolo delle ascisse corrispondenti sono proporzionali ai quadrati dei diametri coniugati, come appunto fu dimostrato per gli assi (§ 468).

In secondo luogo si conduca da un punto  $T$  (fig. 130) del diametro prolungato  $Dd$  una secante  $TN$ , e dai punti  $N$ ,  $n$  ove taglia la curva si tirino le ordinate  $NQ$ ,  $nq$  parallele al diametro coniugato  $Ee$ . Per la proprietà espressa dalla (3) avremo

$$\overline{NQ}^2 : DQ \cdot Qd :: \overline{EC}^2 : \overline{CD}^2$$

$$\overline{nq}^2 : Dq \cdot qd :: \overline{EC}^2 : \overline{CD}^2,$$

e perciò inferiremo che

$$(4) \overline{NQ}^2 : \overline{nq}^2 :: DQ \cdot Qd :: Dq \cdot qd,$$



Fig. 130.

cioè i quadrati delle ordinate al diametro sono proporzionali ai rettangoli delle ascisse corrispondenti. Questa proprietà è più generale di quella che abbiamo veduta verificarsi rispetto agli assi (§ 467), i quali non sono che due diametri che si tagliano a angolo retto. Ora dai triangoli simili  $TNQ$ ,  $Tnq$  avremo

$$TQ : Tq :: NQ : nq,$$

la quale può ridursi a

$$\overline{TQ}^2 : \overline{Tq}^2 :: \overline{NQ}^2 : \overline{nq}^2,$$

e per conseguenza, poichè abbiamo dalla (4) che i quadrati delle  $NQ$ ,  $nq$  sono proporzionali ai rettangoli delle ascisse corrispondenti, si otterrà

$$\overline{TQ}^2 : \overline{Tq}^2 :: DQ \cdot Qd : Dq \cdot qd,$$

e quindi da questa proporzione avremo l'uguaglianza

$$\overline{TQ}^2 \cdot Dq \cdot qd = \overline{Tq}^2 \cdot DQ \cdot Qd,$$

e perciò sarà

$$(CT - CQ)^2 (DC - Cq) (DC + Cq) = (CT - Cq)^2 (DC - CQ) (DC + CQ)$$

diametro  $Dd$  che divide in mezzo la corda; o viceversa il diametro  $Dd$ , condotto pel punto di incontro  $T$  di due tangenti  $MT$ ,  $mT$  divide per metà la corda  $Mm$  che passa pei punti di contatto.

Se dal punto  $M$  si tira invece la corda  $MN$  parallela al diametro  $Dd$ , ha luogo la stessa proposizione rispetto al diametro coniugato  $Ee$ ; in conseguenza le quattro tangenti  $Tt$ ,  $tT$ ,  $T't'$ ,  $t'T$  condotte agli angoli  $M$ ,  $N$ ,  $n$ ,  $m$  del parallelogrammo inscritto  $MNm$ , formato dalle corde due a due parallele ai diametri coniugati  $Dd$ ,  $Ee$ , ed ugualmente distanti dal centro  $C$ , formano un parallelogrammo circoscritto, che ha per diagonali i diametri stessi prolungati fino ai loro rispettivi punti d'incontro.

190. Adesso siamo in grado di insegnare un altro modo di condurre una tangente da un punto dato fuori della ellisse. Se  $T$  è il punto dato fuori della curva (fig. 129), per esso e pel centro  $C$  si faccia passare il diametro  $Td$ , e si trovi una terza proporzionale dopo  $CT$  ed il semidiametro  $CD$ , e si riporti da  $C$  in  $P$ ; dal punto poi  $P$  così determinato si conduca la ordinata  $PM$  parallela al diametro coniugato  $Ee$  (§ 185), che incontrerà la curva in  $M$ , e finalmente la retta  $MT$  condotta per  $M$  e  $T$  sarà la tangente in  $M$  (§ 189). Si noti che la doppia ordinata  $Mm$

$$\text{ossia} \quad (CT - CQ)^2 (\overline{DC}^2 - \overline{Cq}^2) = (CT - Cq)^2 (\overline{DC}^2 - \overline{CQ}^2)$$

e finalmente sviluppando e riducendo avremo

$$(5) \quad 2 \cdot CT \cdot \overline{CD}^2 = (\overline{CD}^2 + \overline{CT}^2) (CQ + Cq) - 2 \cdot CT \cdot CQ \cdot Cq;$$

ma supponendo che i punti  $N$ ,  $n$  si avvicinino continuamente fra loro fino a coincidere in un sol punto  $M$ , la secante  $NT$  si cangia nella tangente  $MT$ , e le ascisse  $CQ$ ,  $Cq$  divengono uguali alla ascissa  $CP$ : Dunque la relazione (5) rispetto alla tangente  $MT$  diverrà

$$CT \cdot \overline{CD}^2 = CP (\overline{CD}^2 + \overline{CT}^2) - CT \cdot \overline{CP}^2,$$

e quindi avremo

$$\overline{CD}^2 (CT - CP) = CP \cdot CT (CT - CP)$$

ossia  $\overline{CD}^2 = CP \cdot CT$ , da cui finalmente si ottiene  $CT : CD :: CD : CP$  come si voleva dimostrare.

incontrando la curva anco in  $m$ , la retta  $mT$  sarà una seconda tangente in  $m$ ; perciò: *da un punto dato fuori dell'ellisse si possono condurre due tangenti distinte.*<sup>1</sup>

Bastando al nostro scopo le proprietà che abbiamo dimostrate nella passata ed in questa lezione; crediamo inutile di esporre le molte altre di cui gode la ellisse, che per la loro intelligenza richiedono delle cognizioni superiori a quelle che non ammettiamo in coloro, ai quali sono destinate queste lezioni.

**Determinazione degli elementi ellittici.** — 191. Nella pratica ove occorra di costruire la intera ellisse si richiedono dei dati di costruzione somministrati dallo scopo cui deve servire la curva, onde giungere ad un risultato determinato senza vagare in inutili operazioni. Quando venga data di posizione una corda, ossia due punti, il problema è indeterminato, poichè per due punti può passare un numero infinito di ellissi: e lo è parimente se sieno dati tre punti, e quattro punti, come in seguito avremo luogo di riscontrare parlando della combinazione dell'ellisse coi poligoni. Per applicare le regole che stabiliremo sulle proprietà esposte alla costruzione della unica ellisse, è necessario che oltre quei punti sia dato qualcuno degli elementi ellittici, col quale andare in traccia degli altri. A tale ricerca gioverà la soluzione dei seguenti problemi.

192. PROBLEMA I. *Dato l'asse maggiore  $Aa$  (fig. 131) ed un punto  $M$  fuori di esso, trovare l'asse minore ed i fuochi della ellisse che passerebbe pel punto  $M$ .* Sul mezzo  $C$  di  $Aa$  si elevi la perpendicolare  $bO$ , e dal medesimo punto si descriva un arco di cerchio  $ANO$  con un raggio  $AC$  metà di  $Aa$ . Dal punto  $M$  si abbassi sopra  $Aa$  una seconda perpendicolare  $RP$ , che taglierà l'arco

<sup>1</sup> Le proprietà geometriche della ellisse relative ai diametri somministrano altre regole per condurre una tangente da un punto collocato sulla curva, o da un punto preso fuori della medesima, ma essendo meno semplici, e non sempre di facile applicazione in tutti i casi, abbiamo creduto inutile esporle, e gli artisti troveranno le regole della precedente lezione sufficienti in qualunque loro operazione.



in N, e si conduca MQ parallela alla stessa Aa fino che incontrerà in Q la perpendicolare bO. Pei punti N, Q si tiri la NS, e riportando CO da P in R si conduca finalmente dai punti S, R la SR



FIG. 131.

che taglierà in B la perpendicolare bO. Il punto B è una delle estremità dell'asse minore, e perciò portando CB da C in b, sarà Bb l'asse minore cercato. Descrivendo poi un arco col centro in B o in b e col raggio AC, si segneranno sull'asse maggiore Aa due punti che saranno i fuochi (§ 166).

Infatti dai triangoli simili QCS, NPS abbiamo  $QC : NP :: CS : PS$ , mentre dai triangoli simili BCS, RPS abbiamo  $BC : RP :: CS : PS$ ; onde pel rapporto comune  $CS : PS$  avremo  $QC : NP :: BC : RP$ .

ossia  $\overline{QC}^2 : \overline{NP}^2 :: \overline{BC}^2 : \overline{RP}^2$ ;

ma per la parallela MQ è  $QC = MP$ , e dall'arco ANO si ha

$$\overline{NP}^2 = AP \cdot Pa, \quad \text{e} \quad RP = OC = AC$$

dunque  $\overline{MP}^2 : AP \cdot Pa :: \overline{BC}^2 : \overline{AC}^2$ .

Il che deve verificarsi per un punto M della curva che abbia BC ed AC per assi (§ 168).

193. PROBLEMA II. Dato l'asse minore Bb (fig. 132) ed un



Fig. 132.

punto M fuori di esso, trovare l'asse maggiore della ellisse che passerebbe pel punto M

Dal punto dato M, e dal punto di mezzo C di Bb si conducano le perpendicolari MQ ed Aa, e fatto centro in C, col raggio CB metà di Bb si descriva un arco di cerchio, il quale taglierà le perpendicolari MQ, Aa nei punti N, R. Si tiri NR fino che incontra in S il prolungamento dell'asse

dato Bb, e si conduca per S ed M la retta SA, che taglierà la perpendicolare Aa in un punto A. Infine portando CA da C

in  $a$  avremo l'intera  $Aa$  per l'asse maggiore richiesto. Volendo i fuochi si determineranno colle solite costruzioni (§§ 166, 192). Infatti: i due triangoli simili  $MSQ$ ,  $ASC$ , e i due pur simili  $NSQ$ ,  $RSC$  danno

$$\begin{array}{l} \text{rispettivamente} \\ \text{e perciò} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} MQ : AC :: SQ : SC \\ NQ : RC :: SQ : SC, \\ MQ : NQ :: AC : RC \end{array} \right.$$

$$\text{ossia} \quad \overline{MQ}^2 : \overline{NQ}^2 :: \overline{AC}^2 : \overline{RC}^2;$$

ma per costruzione è  $RC = BC$ , e sappiamo che nell'arco  $BNR$  è  $\overline{NQ}^2 = BQ \cdot Qb$  dunque sarà

$$\overline{MQ}^2 : BQ \cdot Qb :: \overline{AC}^2 : \overline{BC}^2,$$

come deve aversi per una ellisse che passi pel punto  $M$ , di cui gli assi sieno  $Aa$ ,  $Bb$  (§ 170).

194. PROBLEMA III. *Dato di posizione il diametro  $Dd$  ed una retta qualunque  $Mm$  (fig. 433) divisa nel mezzo  $P$  da esso, trovare il diametro coniugato della ellisse, che passerebbe per le estremità  $M, m$ .* La direzione di questo diametro è data dalla parallela ad  $Mm$  condotta pel centro  $C$  (§ 185).



Fig. 433.

Per averne la lunghezza, dai punti  $C$  e  $P$  si elevino le perpendicolari  $CO$ ,  $PR$ , e dal centro  $C$  si descriva col raggio  $CD$  un quarto di cerchio  $DNO$ , il quale taglierà le  $CO$ ,  $PR$  in  $O$  ed  $N$ , e dal punto  $O$  si conduca la  $OR$  parallela al diametro  $Dd$ , fino che incontra in  $R$  la perpendicolare

$PR$ , allora si unisca  $M$  con  $N$ , e da  $R$  si faccia passare una parallela a  $MN$ , che taglierà in  $S$  il prolungamento della retta  $Mm$ . Infine riportando  $PS$  da  $C$  in  $E$ , e da  $C$  in  $e$ , la intera  $Ee$  sarà il diametro coniugato cercato. <sup>1</sup>

<sup>1</sup> Infatti le parallele  $MN$ ,  $SR$  danno

$$MP : NP :: SP : RP$$

495 PROBLEMA IV. *Dati di posizione due diametri coniugati Dd, Ee di una ellisse (fig. 434) trovare gli assi.* Da una estremità D del diametro più grande si conduca la perpendicolare NP sul più piccolo, si riporti la metà CE di questo da D in N,



Fig. 434.

e si unisca C con N. Pel punto di mezzo O di CN e per D si tiri una retta, e vi si prenda  $OV = ON$ ; la Va che si conduca da V per C darà la direzione dell'asse maggiore, e perciò una sua perpendicolare bU elevata in C darà quella del minore. Per avere le lunghezze

degli assi, si riporti una lunghezza uguale a  $CO + OD$  da C in A e in a, ed i punti A, a così determinati saranno i vertici o le estremità dell'asse maggiore; riportando poi DV da C in B e in b avremo i vertici o le estremità B, b dell'asse minore della ellisse, che passerebbe per gli estremi D, E, d, e dei diametri dati. Per dimostrare questa costruzione prima di tutto si meni per D sopra aV una perpendicolare DQ, la quale incontrerà CN in un punto M, che sarà sull'arco AMU descritto da C col raggio CA; imperocchè essendo per costruzione  $OV = ON = CO$ , nel triangolo isoscele COV gli angoli OCV, OVC sono uguali, e quindi i triangoli rettangoli MQC, DQV avranno il terzo angolo  $CMQ = VDQ$ , e saranno simili; ma gli angoli ODM, VDQ sono uguali perchè opposti al vertice; dunque è l'angolo  $\widehat{OMD} = \widehat{ODM}$ , ed il triangolo DOM è isoscele, e quindi

ovvero  $\overline{MP}^2 : \overline{NP}^2 :: \overline{SP}^2 : \overline{RP}^2$ ;

ma per costruzione  $RP = CO = CD$ ,  $SP = CE$ , e per la proprietà del circolo  $\overline{NP}^2 = DP \cdot Pd$  dunque

$$\overline{NP}^2 : DP \cdot Pd :: \overline{CE}^2 : \overline{CD}^2.$$

proprietà dei diametri simile a quella degli assi (§ 168, e perciò CE è il semidiametro coniugato di Dd (§ 189 nota 1).

$OM = OD$ , in conseguenza  $CA = CO + OD = CO + OM = CM$ ; cioè il punto  $M$  è sull'arco  $VMU$ . Pertanto i triangoli simili  $MQC$ ,  $DQV$  danno

$$DQ : MQ :: DV : MC$$

ovvero 
$$\overline{DQ}^2 : \overline{MQ}^2 :: \overline{DV}^2 : \overline{MC}^2,$$

ma abbiamo trovato  $MC = CA$ , e per costruzione è  $DV = CB$ , e sappiamo che  $\overline{MQ}^2 = AQ \cdot Qa$ ; dunque avremo

$$\overline{DQ}^2 : AQ \cdot Qa :: \overline{CB}^2 : \overline{CA}^2$$

come abbiamo veduto verificarsi rispetto agli assi (§ 148)

196. Ecco un'altra soluzione di questo problema ancora più semplice. Condotta come nella costruzione precedente la perpendicolare  $NP$ , dallo stesso punto  $D$  (fig. 135) si conduca inoltre la  $Tt$  parallela al diametro coniugato  $Ee$ ; e sul punto di mezzo  $O$  della  $NC$  si elevi una perpendicolare, che incontrerà la parallela  $Tt$  in un punto  $S$ , e col centro in  $S$  e col



Fig. 135.

raggio  $SC$  si descriva la semicirconferenza  $TCt$ ; le rette  $tC, TC$  concorrendo nel centro  $C$  ad

angolo retto daranno le direzioni degli assi. Ora è chiaro che la retta  $Tt$  essendo parallela al diametro  $Ee$ , sarà tangente alla curva nel punto  $D$  (§ 185), perciò se si conducono dal punto  $D$  le perpendicolari  $DR, DQ$  sulle direzioni  $Ct, CT$  degli assi, e una media proporzionale trovata fra  $Ct$  e  $CR$  si riporta da  $C$  in  $B$  e in  $b$ , e una seconda media proporzionale fra  $CT$  e  $CQ$  si riporta da  $C$  in  $A$  e in  $a$ , avremo le lunghezze  $Bb, Aa$  degli assi richiesti (§ 179).

197. Sebbene la costruzione delle soluzioni precedenti sia geometricamente rigorosa, in pratica non può riuscire sempre

esattissima: imperocchè quando i diametri dati fanno un angolo prossimamente retto, i punti  $O$  e  $D$  saranno vicinissimi fra loro, ed allora la direzione della retta  $OV$  nella prima soluzione (§ 195, *fig.* 134) non resta con certezza determinata, e nella seconda soluzione (§ 196, *fig.* 135) le rette  $OS$ ,  $Tt$  si tagliano sotto un angolo piccolissimo che rende incerto il vero punto d'incontro, e perciò in queste grafiche determinazioni per ottenere risultati meno erronei è raccomandabile la maggior diligenza possibile.

498. PROBLEMA V. *Dati di posizione un diametro  $Dd$  (*fig.* 136) ed una retta indefinita  $Tr$ , trovare il diametro coniugato, di cui si conosce la direzione  $dr$ , e gli assi della ellisse tangente alla retta  $Tr$ .* Pel punto di mezzo  $C$  di  $Dd$  (*fig.* 136) si conduca  $te$  parallela



*Fig.* 136.

alla direzione  $dr$ , e si prolunghi il diametro  $Dd$  fino che incontra in  $T$  la retta data  $Tr$ ; se si prende  $CP$  terza proporzionale dopo  $CT$  e  $CD$ , e dal punto  $P$  si tira  $PM$  parallela a  $te$ , l'incontro  $M$  sarà il punto di contatto della tangente  $Tr$ : e se condotta  $MQ$  parallela al diametro  $Dd$  si prende una media proporzionale fra  $Ct$  e  $CQ$  e si riporta da  $C$  in  $E$  e in  $e$ , sarà  $Ee$  il diametro coniugato richiesto. <sup>1</sup> Gli assi poi si otterranno col problema precedente (§§ 195, 196).

499. Nell'arte di fabbricare la buona e solida costruzione degli archi rampanti richiede quasi sempre che i piedritti sieno tangenti alla curva delle centine nei punti estremi della corda. Oltre la corda inclinata all'orizzonte qualche volta è data una linea retta, alla quale deve esser tangente la curva. Per esempio gli archi rampanti destinati a sostenere le branche di una

<sup>1</sup> La ragione di questo operato è messa in evidenza dalla proprietà che abbiamo enunciata nel (§ 189) e dimostrata nella nota del paragrafo medesimo ed è superfluo darne altra dimostrazione.

scala devono ordinariamente soddisfare a queste condizioni. La ellisse prestandosi a tutte le dimensioni è la curva che meglio si adatti in simili costruzioni, e per descriverla al costruttore sarà necessario il trovarne prima gli elementi, e perciò gli sarà utile il precedente problema.

200. Sebbene avvenga raramente di impiegare un arco ellittico, non sarà affatto inutile in pratica il saperne cercare gli elementi per poi costruire la intera ellisse, perciò porremo termine a questa lezione col seguente:

PROBLEMA VI. *Dato un arco ellittico*  $AB$  (fig. 137) *trovare*



Fig. 137.

*il centro e gli assi della ellisse a cui appartiene.* Si conducano due corde qualunque  $AB$ ,  $ab$ , e pei loro punti di mezzo si tiri la  $DR$ , che sarà la direzione di un diametro. Si faccia la stessa operazione sopra due altre corde parallele  $AP$ ,  $sp$  e la direzione  $dr$  del rispettivo diametro taglierà  $DR$  nel punto

$C$  che sarà il centro della ellisse (§ 186); e perciò  $CD$  sarà un semidiametro. Pel punto  $C$  conducendo  $CE$  avremo la direzione del suo coniugato. Finalmente colla corda  $AB$  e col semidiametro  $CD$  il problema terzo (§ 194) ne darà la lunghezza, e col quarto determineremo gli assi (§§ 195, 196).

## LEZIONE DECIMAPRIMA.

*Descrizione e costruzione della ellisse — Compassi ellittici*

**Descrizione e costruzione della ellisse.** — 201. Le proprietà della ellisse relative agli assi come ai diametri, non solo rendono questa curva importantissima per le molteplici applicazioni alle arti e all'industria, ma suggeriscono altresì varie operazioni grafiche e meccaniche per costruirla e descriverla, senza di che non potrebbe ridursi in atto la sua applicazione. Adesso esponiamo le une e le altre.

**202. METODO DELLE ORDINATE.** *Descrivere la ellisse per punti date le lunghezze Aa, Bb degli assi (fig. 438).*

**Regola prima.** — Poste le linee rette Aa, Bb, in modo che



Fig. 438.

si taglino ad angolo retto nel loro punto di mezzo C, si descrive una circonferenza ADad col centro in C e col raggio uguale al semiasse maggiore CA, e si conducono a piacere le ordinate  $np$ ,  $n'p'$ ,  $n''p''$ ,  $n'''p'''$  ecc. nel circolo parallele all'asse minore Bb. Queste poi si dividono nei punti  $m$ ,  $m'$ ,  $m''$ ,  $m'''$  ec.

in due parti che stieno fra loro come gli assi; ossia si cerca una quarta proporzionale dopo i semiasse CA, CB, e ciascuna delle ordinate  $np$ ,  $n'p'$ ,  $n''p''$ ,  $n'''p'''$  ec.; e le rette in tal modo

ottenute si riportano rispettivamente sulle stesse  $np, n'p', n''p', n'''p'''$ , ec. a partire dai punti  $p, p', p'', p'''$  ec.; e quindi pei punti  $B, m, m', m'', m'''$ ... a così determinati si fa passare una linea continua  $Bmm'n''n'''a$  (§§ 62 al 68). In fine ripetendo la stessa operazione negli altri tre quarti del circolo, avremo la intera curva  $ABab$ , la quale, avendo per costruzione le ordinate proporzionali a quelle della circonferenza  $ADad$  descritta sull'asse maggiore  $Aa$ , sarà la ellisse cercata (§ 174). Se invece si descrive la circonferenza col raggio uguale al semiasse minore  $CB$ , e le ordinate si conducono parallele all'asse maggiore, la curva si descrive con una costruzione simile.

*Regola seconda.* Descritte le circonferenze  $ADad, BEbe$  coi semiasse  $CA, CB$  (fig. 139), si conducono a piacere i raggi  $Cn, Cn', Cn'', Cn'''$ , ec. nella circonferenza  $ADad$ , e dai punti  $o, o', o'', o'''$ , ec., ove tagliano la circonferenza  $BEbe$  si conducono le  $om, o'm', o''m'', o'''m'''$  ec. parallele all'asse maggiore  $Aa$ , mentre dai punti  $n, n', n'', n'''$  ec. si tirano le  $nm, n'm', n''m'', n'''m'''$  ec. parallele all'asse minore  $Bb$ ; i punti di incontro  $m, m', m'', m'''$ , ec.



Fig. 139.

delle une colle altre apparterranno all'ellisse cercata. Infatti se per esempio si prolunga la parallela  $u''u''$  fino che incontra in  $p''$  l'asse  $Aa$ , dai triangoli simili  $n''Cp'', n''o''u''$  che ne risultano avremo

$$m''p'' : u''p'' :: Co'' : Cn''$$

ovvero

$$m''p'' : u''p'' :: CA : CB,$$

e perciò resta verificata la proprietà dell'ellisse superiormente rammentata (§ 174). Adunque non resterà che ripetere l'operazione, o riportare simmetricamente i punti  $m, m', m'', m'''$ , ec. nei rimanenti quarti di cer-



chio, e riunirli tutti con una linea continua (§§ 62 al 68), che rappresenterà la intera curva.

203. METODO DEI RAGGI VETTORI. *Descrivere la ellisse per punti date le lunghezze  $Aa$ ,  $Bb$  degli assi (fig. 140).* Posti similmente gli assi  $Aa$ ,  $Bb$  ad angolo retto, si trovano i fuochi  $F$ ,  $f$  (§§ 166, 188), e si prendono sulla eccentricità  $Cf$  in punti a piacere  $p$ ,  $p'$ ,  $p''$ ,  $p'''$ , ec. ciascuno dei quali dividerà l'asse maggiore  $Aa$  in due segmenti; dipoi facendo centro nel fuoco



Fig. 140.

$F$ , coi segmenti  $Ap$ ,  $Ap'$ ,  $Ap''$ ,  $Ap'''$ , ec. come raggi si descrivono altrettanti archi di cerchio, ed invece facendo centro sull'altro fuoco  $f$ , coi raggi uguali ai segmenti rimanenti  $ap$ ,  $ap'$ ,  $ap''$ ,  $ap'''$ , ec. si descrivono pure degli archi, i quali taglino i primi. I punti  $m$ ,  $m'$ ,  $m''$ ,  $m'''$ , ec., di intersezione così determinati, co-

me quelli che si potranno determinare simmetricamente intorno agli assi ripetendo l'operazione, appartengono evidentemente alla ellisse (§ 172), la quale in fine si otterrà interamente unendo tutti i punti col voluto grado di continuità (§§ 62 al 68).

204. I metodi che abbiamo insegnati riescono comodissimi nel disegno, ma non sono più applicabili quando si oltrepassino le ordinarie dimensioni dei fogli di carta. Per descrivere la ellisse al di là di questo limite si può ricorrere ad una semplicissima costruzione meccanica appoggiata sullo stesso principio del metodo precedente, la quale non viene esclusa dallo stesso disegno. Conosciuti gli assi  $Aa$ ,  $Bb$ , e determinati i fuochi  $F$ ,  $f$  sopra un piano, si piantino due chiodi nel luogo di essi (fig. 141). Si faccia passare un filo o una corda possibilmente inestendibile da uno dei chiodi  $f$  intorno al vertice opposto  $a$ , e si riconduca al chiodo  $f$  annodandola in modo che il filo così raddoppiato abbia la stessa lunghezza di  $fa$ . Dipoi se con una punta

da segnare, per esempio con un lapis  $M$ , collocato in  $a$  si tende il filo e si percorre il piano con questa punta procurando di mantenere il filo continuamente ed uniformemente teso, la curva continua che viene a descriversi sarà la ellisse richiesta; infatti, in qualunque posizione sia la punta  $M$ , abbiamo il filo intero  $FM + Mf + Ff = 2 \times fa$  d'onde  $FM + Mf = 2 \times fa - Ff$ ; ma  $2 \times fa - Ff = 2 \times Cf + 2 Ca - 2 Cf = 2 \times Ca = Aa$ ; dunque

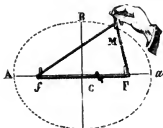
$$FM + Mf = Aa$$


Fig. 141.

cioè le due porzioni di filo  $FM$ ,  $Mf$  prese insieme uguagliano la lunghezza dell'asse maggiore  $Aa$ . (§ 172).

205. Questo processo, chiamato volgarmente la *costruzione del giardiniere*, viene continuamente praticato con facilità dai falegnami e dai muratori, per tracciare la ellisse sopra dei piani di tavole e sul muro. Ma quando si voglia estendere la costruzione alle grandi dimensioni, alla semplicità del metodo si oppone la difficoltà di ottenere la curva con esattezza. Una corda alquanto lunga è suscettibile di allungarsi, specialmente se è molto torta, e bisognerebbe che la trazione operata dalla punta fosse costante, il che è praticamente impossibile. Impiegando una catena si andrebbe incontro allo stesso inconveniente, imperocchè se si tratta di operare sopra un piano verticale il peso della catena impedirebbe di tenerla rigorosamente in linea retta, e venendo a variare la trazione varierebbe pure la somma delle distanze della punta ai due fuochi; se si tratta poi di muovere la catena sopra un piano orizzontale ed in specie sul terreno, il suo stesso peso produrrebbe un attrito, che opporrebbe una resistenza al moto delle parti intermedie di ciascuna porzione

di catena, e per conseguenza varierebbe parimente la somma dei raggi vettori col variar della trazione. La costruzione del Giardiniere adunque non può essere impiegata con buon successo che per le ellissi di piccole dimensioni adottate nelle ordinarie costruzioni delle arti, o per quelle in cui non si richiede di conseguire molta esattezza.

206. Dipendentemente dalla proporzionalità delle ordinate della ellisse con quelle del cerchio, la costruzione della curva per punti si può ottenere forse con più facilità col seguente processo. Noti che sieno gli assi, si prendano su di essi o sul loro prolungamento a partire dal centro  $C$  i segmenti  $CP$ ,  $CQ$ , uguali alla loro somma (fig. 142), o uguali alla loro differenza (fig. 143). Nel segmento  $CP$  si prendano dei punti a piacere  $p$ ,  $p'$ ,  $p''$ ,  $p'''$ , ec. e con una apertura di compasso uguale alla somma degli assi nel primo caso, o alla differenza nel secondo,

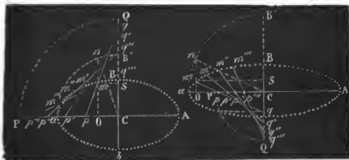


Fig. 142.

Fig. 143.

si segnino i punti  $q$ ,  $q'$ ,  $q''$ ,  $q'''$ , ec. sul segmento  $CQ$ ; quindi si conducano le rette  $pq$ ,  $p'q'$ ,  $p''q''$ ,  $p'''q'''$ , ec., e su di esse o sul loro prolungamento prendendo  $qm$ ,  $q'n'$ ,  $q''n''$ ,  $q'''n'''$  ec. uguali al semiasse maggiore, oppure  $pm$ ,  $p'n'$ ,  $p''n''$ ,  $p'''n'''$ , ec. uguali al semiasse minore, i punti  $m$ ,  $m'$ ,  $m''$ ,  $m'''$  ec. apparterranno all'ellisse dimandata. Infatti se in ambedue le figure, descritto con  $Ca$  l'arco  $amB'$ , da un punto qualunque  $m$  fra i determinati

si conduce  $nO$  perpendicolare all'asse maggiore prolungata quanto occorre, ed  $mS$  perpendicolare al minore, i triangoli simili  $mpO$ ,  $qmS$ , daranno  $mO : qS :: mp : mq$ ; ma tirando  $nC$ , poichè i triangoli rettangoli  $nOC$ ,  $qSm$  sono uguali per avere i lati  $mS$ ,  $OC$  uguali, ed uguali i lati  $nC$ ,  $mq$ , abbiamo  $qS = nO$ , e per costruzione  $mp = CB$ ,  $mq = CA$ . Dunque avremo

$$mO : nO :: CB : CA.$$

e dimostrandosi lo stesso per gli altri punti, rimane perciò verificata la proporzionalità delle ordinate dell'ellisse a quelle del circolo (§ 171). Infine si procederà al solito a determinare tutti gli altri punti ed unirli con una linea continua per descrivere la intera ellisse (§§ 202, 203).

207. Per eseguire praticamente questa costruzione si segnano due linee perpendicolari fra loro sul piano, su cui deve esser descritta la ellisse, o vi si pone i lati di una squadra materiale, e si prende una striscia di carta, o una corda, o un regolo lungo quanto lo sono i due semiassi presi insieme, ovvero quanto è lungo il semiasse maggiore, che rappresenti insomma la linea  $pq$  (fig. 142) ovvero  $qm$  (fig. 143). Facendo strisciare in ambedue i casi i punti  $p$ ,  $q$  del regolo o della corda lungo le due linee o i lati della squadra con moto continuo, un lapis posto nel punto  $m$  segnerà la ellisse con esattezza sufficiente per gli usi delle arti e specialmente del falegname del muratore, del giardiniere ec.

208. METODO DELLE ORDINATE AI DIAMETRI. *Descrivere la ellisse per punti, date le lunghezze e le posizioni di due diametri coniugati  $Dd$ ,  $Ee$ , (fig. 144).* Dalla estremità  $E$  di uno dei diametri dati si conduca una parallela  $Er$  all'altro  $Dd$ , e dal centro  $C$  si abbassi  $Cr$  perpendicolare sopra  $Er$ ; poi coi raggi  $Cr$  e  $CD$  si descrivano due quarti di cerchio  $DR$ ,  $rS$  cogli angoli al centro  $C$  opposti al vertice, e si dividano questi archi nel medesimo numero di parti proporzionali, e per semplicità in cia-

scun arco si facciano uguali fra loro. Dai punti di divisione  $n, n', n''$  ec. dell'arco  $rS$ , contrassegnati con ordine progressivo a partire da  $S$  verso  $r$ , si conducano parallelamente al diame-



Fig. 144.

tro  $Dd$  le indefinite  $nm, n'm', n''n''$  ec. e dai punti di divisione  $N, N', N''$ , ec. dell'arco  $DR$  contrassegnati in modo simile da  $D$  verso  $R$ , si menino le  $Np, N'p', N''p''$ , ec. parallele ad  $Rr$ , e quindi dai punti  $p, p', p''$ , ec., si conducano le indefinite  $pm, p'm', p''m''$ , ec., parallele all'altro diametro  $Ee$ : i punti di incontro  $m, m', m''$ , ec. di esse con le parallele  $nm, n'm', n''n''$ , ec. tirate dai punti corrispondenti dell'arco  $rS$  appartengono alla curva,  $E$  raddoppiando le  $mp, m'p', m''p''$ , ec. ordinate al diametro  $Dd$  e riportandole al di là del diametro  $Ee$  a distanze rispettivamente uguali dal centro  $C$ , otterremo tutti i punti pei quali deve passare la intera ellisse. <sup>1</sup>

209. Dati i diametri coniugati la costruzione per punti si

<sup>1</sup> Per dimostrare che quei punti appartengono all'Ellisse, si consideri un punto qualunque  $m$ , e dal punto di divisione corrispondente  $N$  dell'arco  $DR$  si conduca  $NQ$  parallela a  $Dd$ . Siccome gli archi sono divisi proporzionalmente, i raggi lo saranno pure, ed avremo

$$Cq : CQ :: Cr : CR ;$$

ma dai triangoli simili  $CqB, CrE$  abbiamo  $Cq : CB :: Cr : CE$ . Dunque avremo  $CB : CQ :: CE : CR$ , e poichè  $CB = mp$ ,  $CQ = Np$ , e  $CR = CD$ , sostituendo sarà  $mp : Np :: CE : CD$ . Ora quadrando si ottiene

$$\overline{mp}^2 : \overline{Np}^2 :: \overline{CE}^2 : \overline{CD}^2 ;$$

ma nel cerchio di raggio  $CD$  abbiamo  $\overline{Np}^2 = dp \times pD$ : Dunque avremo  $\overline{mp}^2 : dp \times pD :: \overline{CE}^2 : \overline{CD}^2$ : dalla quale si rileva che  $mp$  è una ordinata ai diametri coniugati  $Dd, Ee$ , che ha per ascisse sul diametro  $Dd$  i segmenti  $dp, pD$ : e perciò il punto  $m$  appartiene alla curva conforme alla proprietà dimostrata alla nota 1 del § 189.

ottiene più brevemente con un processo analogo a quello tenuto colla somma e colla differenza degli assi (§§ 206, 207). Dalla estremità E di uno dei diametri Ee (figg. 445, 446), si conduca sull'altro Dd o sul suo prolungamento una perpendicolare EQ, e si riporti su di essa la metà CD di questo ultimo da E



Fig. 445.

Fig. 446.

in  $Q'$  al di sopra del punto E (fig. 445) o al di sotto di E (fig. 446), e dipoi pel punto  $Q'$  e pel centro C si faccia passare la retta indefinita Rr. Nel primo caso la retta  $QQ'$  eguaglia la somma della perpendicolare EQ e del semidiametro CD, e nel secondo uguaglia la differenza loro.<sup>1</sup> Ciò determinato, si segnino i tre punti Q, E,  $Q'$  sopra una striscia di carta, sopra un regolo o sopra una corda, e quindi si muova la striscia in modo che i punti Q,  $Q'$  percorrano rispettivamente il diametro Dd, e la retta Rr senza distaccarsene.<sup>2</sup> Un lapis posto nel

<sup>1</sup> In questo caso siccome le lunghezze e la inclinazione dei diametri, possono esser tali che la perpendicolare EQ sia maggiore o minore del semidiametro CD, il punto  $Q'$  si troverà al di fuori dei punti Q ed E, come nella fig. 446, ovvero fra i medesimi. Qualunque sia però la posizione del punto  $Q'$  il processo resta lo stesso, e solo è da raccomandarsi allo studioso di por mente alla corrispondenza delle lettere nei diversi aspetti che può prendere la figura.

<sup>2</sup> Per avere una guida sicura nei moti dei punti Q,  $Q'$  secondo le direzioni Dd, Rr, si pongano a contatto di esse gli spigoli di due regoli,

punto M per ogni posizione della striscia o del regolo segnerà un punto della ellisse, e se essa si muove continuamente descriverà la curva continua.<sup>1</sup>

**Compassi ellittici.** — 210. Gli stromenti o meccanismi destinati a descrivere la ellisse, analogamente a quelli coi quali

come per esempio i lati di una *falsa squadra*, allora se si infiggono nel regolo mobile due perni in luogo dei punti Q, Q', facendoli strisciare sui lati della falsa squadra otterremo con facilità il movimento continuo del regolo intorno al centro della ellisse.

<sup>1</sup> Il principio che abbiamo richiamato alla nota del paragrafo precedente serve pure a dimostrare che i punti segnati dal punto M appartengono alla ellisse. Dal centro C e col raggio CD (figg. 145, 146) si descriva una circonferenza, si conduca il raggio CD' perpendicolare a Dd' e si tiri ED'. Poichè CD', EQ' sono per costruzione parallele ed uguali a CD e perciò fra loro, la figura CD'EQ' sarà un parallelogrammo, ed ED' uguale e parallela a CQ'. Ora mentre che la linea QQ' (fig. 145), o la linea EQ' (fig. 146) percorre successivamente tutti gli angoli intorno al centro C da E verso R nel senso della freccia, il raggio CD' percorre il circolo, ed ambedue queste rette si confonderanno nella posizione CD e poi nella posizione CR' quando il punto E si troverà sul punto r e la retta QQ' o EQ' risulterà perpendicolare a CD, cioè parallela a CD': le medesime rette si sovrapporranno nelle posizioni Cd e Cr, e finalmente ritorneranno alle posizioni che avevano nel punto di partenza, e saranno tuttavia parallele. Dalle posizioni che le rette prendono in questi movimenti ne concluderemo che esse si mantengono sempre parallele. Pertanto consideriamo la striscia o il regolo in una posizione qualunque qq', e dal punto In cui si troverà il lapis M si conduca MP parallela a CE, dal punto P l'ordinata NP parallela a CD', e si tiri MN. Il raggio CN essendo uguale e parallelo a Mq', la figura NMq'C sarà un parallelogrammo, ed NM parallelo a Cq', ossia a D'E; perciò i triangoli ECD', MPN avendo i lati paralleli fra loro saranno simili, e daranno MP : PN :: CE : CD', e quindi quadrando ogni termine

$$\overline{MP}^2 : \overline{PN}^2 :: \overline{CE}^2 : \overline{CD}^2;$$

ma è CD = CD, e  $\overline{PN}^2 = DP \cdot Pd$ :

dunque avremo  $\overline{MP}^2 : DP \cdot Pd :: \overline{CE}^2 : \overline{CD}^2$ ;

restando così verificata una delle proprietà dei diametri della ellisse, il punto M appartiene alla curva, come si potrebbe dimostrare altrettanto per qualunque altra posizione della striscia.

si descrive la parabola (§ 444), si chiamano *compassi ellittici*. Le molteplici proprietà geometriche della ellisse suggeriscono l'idea di molte combinazioni meccaniche da servire alla costruzione di vari compassi ellittici. I costruttori, specialmente di stromenti matematici, troveranno in ciò largo campo per esercitare il loro ingegno. Qui ci limiteremo a dare un cenno del meccanismo di quelli fondati sulle principali proprietà della curva da noi esposte. Frattanto per l'intelligenza del meccanismo di alcuni compassi giova prima di tutto richiamare un principio sulla descrizione geometrica-meccanica della linea retta.<sup>1</sup>

In generale si prenda un triangolo isoscele BCD (*fig. 447*), formato di una lastra di metallo o di una tavoletta di legno, ed un regolo AC eguale ai lati CB, CD. Una estremità del regolo si

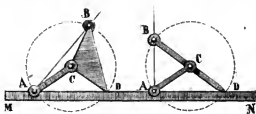


Fig. 447.

Fig. 448.

renda girevole intorno ad un pernio A infisso sullo spigolo della riga MN, e l'altra estremità venga imperniatamobil-

mente nel vertice C del triangolo. Se il vertice D dell'angolo adiacente alla base del triangolo si fa strisciare a mano o con qualche meccanismo lungo lo spigolo AD della riga MN, l'altro vertice B concepirà un moto rettilineo, e postovi un lapis traccierà una linea retta BA, che passerà pel punto fisso A. Infatti, qualunque sia la posizione del triangolo, fatto centro in C

<sup>1</sup> Nelle nostre lezioni di geometria elementare esponemmo anco questo processo meccanico per tracciare le linee rette: qui essendo utile il rammentarlo, e supponendo i lettori al possesso di quelle lezioni, o in generale della geometria elementare ne diamo in pari tempo una più semplice dimostrazione.



si descriva una circonferenza, che passi pei punti A, B, D. L'angolo al centro BCD insistente sulla corda BD, sappiamo che è doppio dell'angolo inscritto BAD insistente sulla stessa corda: ma l'angolo BCD è costante; dunque anco l'angolo BAD è costante, cioè il punto B si troverà sempre sulla linea BA.

Quando l'angolo BCD divenga uguale a due angoli retti, i lati CB, CD, si troveranno nella stessa direzione (*fig. 448*) e si confonderanno col diametro BD della circonferenza descritta col raggio AC, ed il triangolo si convertirà nel regolo BD: e perciò l'angolo BAD sarà retto, ossia la linea BA tracciata dal lapis B sarà perpendicolare allo AD della riga MN.

244. Ora ecco come si dispone comunemente il compasso per descrivere la ellisse, noti che sieno gli assi. In un punto fisso C dello spigolo della riga MN sia impernata mobilmente l'estremità di un regoletto CD lungo quanto la metà della somma dei semiassi CA, CB (*fig. 449*), ovvero uguale alla metà della loro differenza (*fig. 450*),

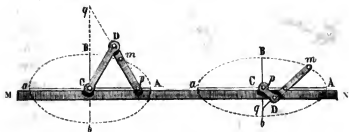


Fig. 449.

Fig. 450.

ed all'altra estremità D sia nocellato un secondo regoletto  $Dp$  lungo quanto CD, nel primo caso, o nel secondo caso un regoletto  $Dm$  uguale al semiasse CB ed al regoletto CD presi insieme. Se si fa strisciare continuamente lungo lo spigolo  $Aa$  della riga MN un pernio  $p$  infisso nella estremità libera del regoletto  $Dp$ , oppure

infisso nel regoletto  $Dm$  ad una distanza  $pm$  dall'estremità  $m$  uguale al semiasse  $CB$ , una punta o un lapis  $m$  infilato nel regoletto  $Dp$  ad una distanza da  $p$  di  $mp = CB$ , ovvero posto nell'estremità libera del regoletto  $Dm$ , descriverà con movimento continuo la ellisse. Infatti immaginando prolungato il regoletto  $Dp$  o  $Dm$  fino all'incontro dell'asse minore, avremo

$$pq = CA + CB, \text{ o } pq = CA - CB,$$

e quindi mentre il punto  $p$  si muove lungo  $CA$ , il punto  $q$  si muoverebbe lungo l'asse minore (§ 211), e perciò viene eseguito il processo esposto della descrizione e costruzione meccanica della curva per mezzo di una retta uguale alla somma, o alla differenza degli assi (§§ 206, 207).

Volendo rendere lo strumento capace di tracciare qualunque ellisse, l'ingegno dell'artista costruirà i regoletti in modo che l'operatore possa variare le distanze dei punti  $C$ ,  $p$ ,  $m$ , dal pernio  $D$  a seconda delle lunghezze degli assi dati.

212. Dati gli assi  $Aa$ ,  $Bb$  della ellisse (fig. 451), si segnino sopra  $Aa$  i fuochi  $f$ ,  $F$  (§§ 166, 188).

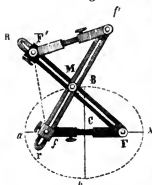


Fig. 451.

Sopra due regoli  $f'r$ ,  $FR$  posti in croce vengano impernati mobilmente a distanze  $f'r$ ,  $FR$  uguali all'asse maggiore  $Aa$  le estremità di due altri regoli  $fF$ ,  $f'F'$  lunghi quanto la doppia eccentricità  $2CF = Ff$  della ellisse. Se i perni  $f$ ,  $F$  di uno dei regoli  $fF$ ,  $f'F'$  di questo apparecchio si fanno corrispondere ai fuochi già segnati sopra un piano, e si tiene fisso il regolo  $fF$ ,

una punta o lapis  $M$  infilato nei canali a giorno praticati lungo i regoli  $f'r$ ,  $FR$  essendo obbligato nel suo movimento a percorrerli simultaneamente, tratterà la ellisse continuamente. Per rendere lo strumento atto alla descrizione delle

ellissi, qualunque sieno le lunghezze degli assi, proporzionalmente alla grandezza dei disegni pei quali deve servire, l'ingegnoso meccanico costruirà i quattro regoli variabili in lunghezza a piacimento del disegnatore, come per esempio, ponendo i perni  $f, F'$  sopra due manicotti da fissarsi con viti di pressione lungo i regoli  $f'r, FR$  alla distanza voluta dai punti  $f', F$ , e facendo i regoli  $fF, f'F'$  di due pezzi infilati uno entro l'altro, e da rendersi rigidi con viti di pressione.

È facile mostrare la verità della descrizione operata da questo stromento; imperocchè in qualunque posizione si trovi il lapis  $M$ , tirando una linea  $f'f$  i triangoli  $f'F'f, f'F'F$  sono uguali, e tali divengono i triangoli  $fMF, f'MF'$ , perciò  $fM = F'M$ , ma per costruzione  $F'M + MF = \Lambda a$ , dunque  $fM + MF = \Lambda a$  (§ 172).

213. Sul medesimo principio di questo stromento può costruirsi un altro compasso, il quale sebbene meno semplice, meglio si dispone a tracciare la curva di ogni dimensione. Si immagini una losanga  $fPaR$  composta di quattro regoli uguali (fig. 152)

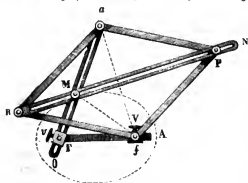


Fig. 152.

articolati negli angoli, e che in uno  $R$  di essi sia imperniata la estremità di una riga  $RN$ . nel di cui canale a giorno possa scorrere il pernio  $P$  dell'angolo opposto. Il pernio dell'angolo  $f$  poi sia da fissarsi a piacimento lungo un regolo  $fA$  per mezzo di una vite di pressione  $V$ , ed il suo angolo opposto  $a$  sia imperniato nella estremità di una seconda riga canalata  $aO$ . Questa riga venga infilata in un manicotto  $F$  nocellato nella estremità del

regolo FA, e capace di esser fissato a piacere sulla riga aO colla vite di pressione v. Per usare dello apparecchio si fissi il pernio f ad una distanza dal pernio del manicotto F uguale alla doppia eccentricità, mentre il pernio F si fisserà sulla riga aO distante dall'angolo a quanto è lungo l'asse maggiore dell'ellisse da descriversi. Con questa disposizione si applicano i perni F, f sopra i fuochi segnati sopra un piano, e movendo una punta o lapis M infilata, e perciò obbligata a

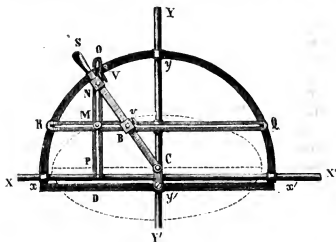


Fig. 153.

scorrere contemporaneamente nei canali delle righe aO, RN traceremo con moto continuo la curva. <sup>1</sup>

<sup>1</sup> È da avvertire che quando il lapis M sarà giunto al vertice della curva più prossimo ad F, i regoli aO, FA e la diagonale fa si troveranno nella stessa direzione, ed avremo  $fa = fF + Fa$ . Ma deve essere sempre  $aR + Rf > fa$  dunque sarà  $aR + Rf > fF + Fa$  ossia  $aR > \frac{fF + Fa}{2}$ , cioè la lunghezza dei regoli della losanga fPaR dovrà prendersi sempre maggiore della semisomma delle lunghezze massime della doppia eccentricità e dell'asse maggiore, di cui sarà suscettibile la costruzione del compasso, ossia maggiore degli interi regoli aO, FA presi insieme.

Infatti in qualunque posizione si trovi il compasso, ossia il lapis  $M$ , si tiri  $fa$  ed  $fM$ . Siccome le diagonali di una losanga si tagliano ad angolo retto, ogni punto della riga  $RN$  è ugualmente distante dai punti  $a$  ed  $f$ , e perciò  $Ma = Mf$ ; ma per costruzione  $Fa = FM + Ma$ ; dunque  $Fa = FM + Mf$ , cioè la somma dei raggi vettori eguaglia l'asse maggiore (§ 172), e conseguentemente la riga  $RN$  darà la posizione della tangente nel punto  $M$ .

214. Dati gli assi, sul principio della proporzionalità delle ordinate del cerchio e dell'ellisse ecco come immaginerei un compasso. In un telaio metallico o di legno  $xyx'$  (fig. 153), di forma qualunque, sieno fissati gli anelli  $x$ ,  $x'$  ed  $y$ ,  $y'$  in modo che vi possano scorrere rispettivamente le verghe  $XX'$ , ed  $YY'$  perpendicolari fra loro. La verga  $XX'$  porti fissa a squadra la riga  $DO$  canalata a giorno, ed alla verga  $YY'$  sia fissata invariabilmente a croce rettangola la riga  $RQ$ , di cui il canale a giorno interrompa la verga medesima. In un pernio fisso  $C$  venga articolata l'estremità di un regolo  $SC$ , in cui possano fissarsi a distanze variabili da  $C$  i perni  $N$ ,  $B$  mediante le viti di pressione  $V$ ,  $v$ . Ora se il pernio  $N$  fissato ad una distanza  $NC$  uguale al semiasse maggiore può scorrere dentro il canale della riga  $PO$ , ed il pernio  $B$  fissato ad una distanza  $BC$  uguale al semiasse minore può scorrere nel canale dell'altra riga  $RQ$ , è chiaro che movendo il regolo  $SC$  intorno a  $C$ , la riga  $PO$  si muoverà parallelamente a  $YY'$ , e la riga  $RQ$  parallelamente ad  $XX'$ ; perciò un lapis  $M$  obbligato a scorrere in ambedue i canali  $DO$ ,  $RQ$ , avrà un movimento risultante, e traccierà una semi-ellisse, di cui  $NC$ ,  $BC$  sono i semiassi. Volgendo oppostamente lo stromento si traccierà l'altra metà. Che il lapis  $M$  tracci la curva si verifica facilmente, poichè in qualunque posizione si trovi, i triangoli  $NMB$ ,  $NPC$  daranno sempre

$$MP : NP :: BC : NC ;$$

ma il rapporto  $BC : NC$  è costante; dunque le ordinate della

curva descritta saranno proporzionali a quelle del circolo descritto col raggio  $NC$ , ossia col semiasse maggiore (§ 174).

215. Per compiere tutto ciò che abbiamo esposto in questa lezione sulla costruzione meccanica dell'ellisse, mostriamo come, dati soltanto i diametri, le loro proprietà somministrino l'idea di un compasso ellittico.

Siano  $Dd$ ,  $Ee$  i diametri coniugati dati (Figg. 154, 155); primieramente dal vertice  $E$  di un diametro si conduca una

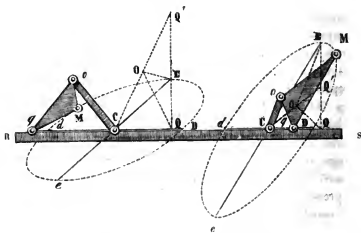


Fig. 154.

Fig. 155.

perpendicolare indefinita sul suo coniugato  $Dd$ , e si riporti su di essa il semidiametro  $CD$  da  $E$  in  $Q'$  al di sopra di  $E$  (fig. 154) o al di sotto (fig. 155), e si tiri  $CQ'$ ; ma per il punto di mezzo  $O$  di  $CQ'$  menando  $OQ$ , il triangolo  $QOQ'$  sarà isoscele, e strisciando l'angolo  $Q$  sopra  $CD$ , mentre il vertice  $O$  fa girare  $CO$  intorno a  $C$ , l'angolo  $Q'$  percorre la linea  $CQ'$  (§ 210); dunque il punto  $E$  della base  $QQ'$  del triangolo o del suo prolungamento descriverebbe la ellisse (§ 209). Ciò esposto e dimostrato, si prenda un regoletto  $Co$  uguale al lato  $OQ$  del triangolo  $OEQ$ , e si imperni mobilmente una sua estremità nel punto fisso  $C$ .

dello spigolo di una riga  $RS$ ; e l'altra estremità venga articolata nel vertice  $o$  di un triangolo  $oMq$  formato di legno o di metallo perfettamente uguale al triangolo  $OEQ$ . È chiaro che applicando lo spigolo della riga  $RS$  sul diametro  $Dd$ , ed il pernio  $C$  sul centro, se si fa strisciare lungo lo spigolo della riga un pernio posto nell'angolo  $q$  del triangolo  $oMq$  un lapis  $M$  adattato nel terzo angolo libero, traeccherà con moto continuo la ellisse, di cui  $Dd, Ee$  sono i diametri coniugati.

Un apparecchio siffatto non serve che a tracciare l'unica ellisse per la quale è costruito, ma non è difficile il comprendere che il triangolo  $oMq$  potrebbe formarsi di tre regoli, variabili in lunghezza per mezzo di qualche meccanismo, e variabile rendendo pure la lunghezza del regolo  $Co$ ; ed allora l'apparecchio si presterebbe a descrivere la curva qualunque sieno le lunghezze e la inclinazione dei diametri coniugati.

## LEZIONE DECIMASECONDA.

*Combinazioni della Ellisse coi poligoni, col circolo e colla Ellisse. — Misura della Ellisse. — Ellissoide. — Misura della Ellissoide.*

**Combinazioni della ellisse, coi poligoni, col circolo e colla ellisse.** — 216. È in vario modo importante alle arti, e torna vantaggioso specialmente all'ornativa, il saper combinare la ellisse coi poligoni, coi cerchi, e colle ellissi stesse. Tali combinazioni sono innumerevoli, e presentano altrettanti problemi, che la pratica risolve ordinariamente con costruzioni grafiche. Tutto ciò appartiene allo studio della Geometria descrittiva, ed alle esercitazioni del disegno geometrico; ma qui non potendo uscire dallo stretto ordine di materie che ci siamo prefissi, accenneremo di volo le principali considerazioni cui danno luogo quelle combinazioni, e che possono illuminare gli artisti nell'accingersi ad operare.

217. Le combinazioni della ellisse e dei poligoni offrono quattro casi principali, cioè di inscrivere e circoscrivere un poligono ad una ellisse data; di inscrivere e circoscrivere una ellisse ad un poligono dato. Taceremo dell'iscrizione e circoscrizione dei poligoni irregolari all'ellisse perchè sono di pochissima utilità, e d'altronde sono troppo facili ad eseguirsi. La iscrizione e circoscrizione poi della ellisse ai poligoni irregolari possono presentare nella pratica qualche interesse ed offrono i casi i più notevoli di considerazione; la prima operazione si riduce a



descrivere una ellisse che passi per un certo numero di punti dati, e la seconda a descrivere una ellisse che resulti tangente ad un certo numero di rette date di posizione.

218. Due triangoli equilateri  $ADC$ ,  $BEF$  (*fig. 456*) si possono inscrivere nella ellisse purchè abbiano un lato parallelo ad uno degli assi. Quello che ha un lato  $EF$  parallelo all'asse

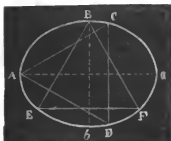


Fig. 456.

maggiore  $Aa$  sarà il più grande, e l'altro che ha un lato  $DC$  parallelo all'asse minore  $Bb$ , sarà il più piccolo di tutti i triangoli regolari che possono inscrivere. Due pure sono i triangoli equilateri circoscritti all'ellisse che meritano una qualche considerazione, ed hanno i lati paralleli a quelli degli inscritti.

Una infinità di ellissi differenti possono essere circoscritte o inscritte in un triangolo qualunque, poichè tre punti o tre tangenti non bastano per determinare una ellisse.

219. Essendo infinite le coppie di diametri coniugati che possono condursi nella ellisse, infiniti divengono i parallelo-



Fig. 457.

grammi da inscrivere o circoscrivere all'ellisse. Quando sieno noti due diametri coniugati  $Dd$ ,  $Ee$  (*fig. 457*), le quattro corde della ellisse tirate alle loro estremità formano il parallelogrammo inscritto  $DEde$ . Due sono i circoscritti,

secondo che i loro lati sono paralleli a quelli dell'inscritto, o tangenti negli estremi dei diametri: nel primo caso le diagonali coincidono con quelle dell'inscritto, e nel secondo sono pure due diametri coniugati. Prendendo due diametri qualunque per-

pendicolari fra loro, il parallelogrammo diviene una losanga, e le diagonali non sono diametri coniugati se non quando coincidono cogli assi. Se i diametri sono uguali il parallelogrammo è un rettangolo, e se inoltre sono perpendicolari fra loro è un quadrato. Siccome le posizioni di quattro punti o di quattro rette non bastano a determinare una ellisse, la iscrizione e la circoscrizione della ellisse ad un parallelogrammo qualunque si può ottenere in modi infiniti ove non sia definita da nuovi dati di costruzione.

Infine i rapporti di superficie che esistono fra i parallelogrammi inscritti e circoscritti sono interessanti a conoscersi, ma qui non abbiamo nè i mezzi nè il tempo per trattenerci utilmente su di ciò.

220. Le combinazioni della ellisse coi parallelogrammi offrono molteplici applicazioni. Il giardiniere nella formazione dei giardini, l'intarsiatore e il marmista nella disposizione dei tavolati (*parquet*) e dei pavimenti, e tutti gli artisti insomma che debbono ornare con figure regolari i loro prodotti si troveranno in generale a inscrivere o circoscrivere i parallelogrammi all'ellisse e viceversa, e specialmente le losanghe, i rettangoli ed i quadrati.

221. È impossibile di inscrivere, o di circoscrivere un pentagono regolare ad una ellisse, e di circoscrivere o di inscrivere una ellisse al medesimo poligono. In questi casi la curva corrispondente si riduce ad un circolo. Siccome la Geometria dimostra che le posizioni di cinque punti o di cinque tangenti sono sufficienti a determinare una ellisse, possiamo sempre circoscrivere o inscrivere la ellisse in un pentagono irregolare dato. Le cinque condizioni determinando completamente la ellisse, resta impossibile operare sopra un esagono, ed a più forte ragione sopra un poligono di maggior numero di lati, a meno che questi non abbiano una particolare disposizione.

222. Ora è da notarsi che il numero dei punti che una el-

lisse può aver comuni col circolo non può esser più di quattro. I problemi adunque sulle combinazioni della ellisse col circolo si riducono a costruire una ellisse, che abbia uno, due, tre o quattro punti comuni con un dato cerchio, e viceversa. Quando le due curve non debbono aver di comune che un punto, esse sono tangenti per la concavità o per la convessità, e le rispettive normali si trovano nella stessa direzione. Se il circolo venga richiesto della stessa curvatura della ellisse nel punto di contatto, allora si tratta di cercare il *circolo osculatore* corrispondente (§§ 20, 21), ed il problema si riferisce alla curvatura delle linee. Quando i punti comuni sono due, le curve possono tagliarsi o toccarsi in ambedue, e tagliarsi in uno mentre si toccano nell'altro. Quando poi i punti sono tre, uno di essi è un punto di contatto. In generale in tutti questi casi il problema che presenta la combinazione delle curve riesce indeterminato ove non si sottoponga la soluzione a condizioni particolari. Lo stesso avviene per la combinazione della ellisse e del circolo, che debbono aver comuni quattro punti, nei quali le curve necessariamente si tagliano.

223. Due ellissi non possono aver più di quattro punti comuni senza confondersi insieme. Se esse hanno uno, o due, o tre, o quattro punti comuni, si applicheranno per ciascuna combinazione le considerazioni analoghe (§ 222) che abbiamo fatte per ciascun numero di punti comuni dell'ellisse e del circolo.

224. Ora resterebbe a parlare delle combinazioni di due ellissi che non hanno alcun punto comune. Le sole di questo genere che meritano veramente di esser apprezzate sono le *Ellissi concentriche*. Questa parola non deve usarsi nel senso rigoroso adoprato per le circonferenze, ma deve riferirsi soltanto a due ellissi che hanno il centro comune, fra le quali mostriamo il seguente caso importante a conoscersi dai costruttori.

225. Sieno  $ABab$ ,  $A'B'd'b'$  due ellissi col centro comune  $C$ .

(fig. 458), e coi rispettivi assi nella stessa direzione. Supponendo che la differenza  $AA'$  degli assi maggiori uguagli quella  $BB'$  degli assi minori, e riportando  $CB$  in  $CD$  e  $CB'$  in  $CD'$ , abbiamo  $AA' = DD'$ , ed aggiungendo la porzione comune  $A'D$  avremo  $AD = A'D'$ ; cioè la differenza dei semiassi della ellisse grande uguaglia quella dei semiassi della piccola. Ora da un punto qualunque  $m$  conducendo



Fig. 158.

qualunque  $m$  conducendo  $mq$  uguale all'asse maggiore  $CA$ , sappiamo che  $pq$  uguaglia la differenza  $AD = AD'$  (§ 206). Dunque

$$mm' = AA' = BB'.$$

E siccome  $mq$  non si trova giammai nella posizione della normale comune alle due curve, tranne quando coincide cogli assi in cui  $mm'$  si confonde con  $AA'$  e  $BB'$ , perciò *due ellissi concentriche e cogli assi nella stessa direzione non possono essere equidistanti o parallele.*

226. Questo principio è da avvertirsi nelle applicazioni di simili ellissi concentriche. Una volta avendo ordinariamente per tutto la medesima grossezza la curva di *estradosso* è parallela a quella di *intradosso*. Se questa dunque è una ellisse l'altra non può esser della medesima natura, e viceversa.

Se i due lembi di una striscia di carta, di legno ec. sono ellittici, la striscia non è della stessa larghezza, e se i lembi sono paralleli uno di essi non è un ellisse.

Questo fatto in generale è completamente ignorato dagli artigiani, e perciò si rammentino che dopo aver tracciata la ellisse per curva interna o di *intradosso*, devono condurre tante normali, e portare su di esse la grossezza della volta o la larghezza della striscia; e così determinati altrettanti punti, per essi condurranno (§§ 62 al 68) una linea curva, che sarà parallela alla

prima o alla curva di estradosso. A suo luogo insegneremo a costruire le curve di estradosso dipendentemente da altri principii.

**Misura della ellisse.** — 227 In una figura ellittica si presentano due cose da misurarsi, il contorno e la superficie da esso racchiusa.

Sebbene la ellisse sia una curva di lunghezza finita, la Geometria non somministra alcun mezzo per ottenerne con esattezza la misura lineare, e fa d'uopo ricorrere ai metodi generali di approssimazione (§§ 70 al 76). Parimente la misura superficiale o la quadratura non si ottiene che approssimativa (§§ 77 all' 83), ma può impiegarsi un metodo particolare fondato sopra la seguente relazione, che esiste fra la superficie della ellisse e del cerchio che ha per diametro uno degli assi.

228. Sull'asse  $Aa$  della ellisse  $ABab$  come diametro si descriva la circonferenza  $ADad$  (fig. 459), e dai punti  $p, p', p''$ , ec.



Fig. 459.

presi sul medesimo si elevino altrettante ordinate rettangole, e si uniscano fra loro i punti d'incontro  $m, m', m''$ , ec. colla ellisse, e  $n, n', n''$ , ec. col cerchio, inscrivendo così nella semiellisse e nel semicerchio due poligoni corrispondenti. In virtù della proporzionalità delle ordinate della ellisse a quelle del cerchio (§ 171),

$$\text{avremo} \quad \left\{ \begin{array}{l} mp : np :: CB : CD \\ m'p' : n'p' :: CB : CD, \end{array} \right.$$

e sommando queste proporzioni otterremo

$$mp + m'p' : np + n'p' :: 2CB : 2CD$$

$$\text{ossia} \quad \frac{mp + m'p'}{2} : \frac{np + n'p'}{2} :: CB : CA,$$

cioè le aree dei due trapezi  $mpp'm'$ ,  $npp'n'$  espresse dai ter-

mini della prima ragione, stanno fra loro come  $CB$  sta a  $CA$ ; e nella medesima ragione staranno parimente tutti gli altri trapezi; ma le somme dei trapezi formano i poligoni inscritti rispettivamente nella semiellisse e nel semicircolo: dunque l'area del poligono inscritto nella semiellisse starà a quella del poligono inscritto nel semicircolo come  $CB$  sta a  $CA$ .

Ora il primo poligono uguaglia la semiellisse meno la somma delle lunette ellittiche, ed il secondo poligono è uguale al semicircolo diminuito della somma delle lunette circolari; ma a misura che i punti  $p, p', p'',$  ec. si aumentano all'infinito, le lunette variano, e possono divenire più piccole di qualunque quantità assegnabile e trascurabili rispetto alla semiellisse ed al semicircolo che rimangono costanti: dunque la semiellisse ed il semicircolo giungeranno ad uguagliare i rispettivi poligoni, e staranno fra loro nella medesima proporzione; <sup>1</sup> cioè *l'area della ellisse sta a quella del circolo che ha per diametro il grand'asse, come l'asse minore sta al maggiore*. Se invece avessimo descritto la circonferenza sull'asse minore come diametro, con una simile dimostrazione saremmo giunti a stabilire il principio analogo che *l'area della ellisse sta a quella del circolo che ha per diametro il piccolo asse, come l'asse maggiore sta al minore*.

229. Dal principio esposto ne consegue evidentemente il mezzo facile di misurare la superficie di una figura ellittica, di cui sono conosciute le lunghezze degli assi. A tale effetto considerando il primo caso (§ 228, fig. 459), avremo

$$\text{area } ABab : \text{area } ADad :: CB : CA ;$$

<sup>1</sup> Questa dimostrazione è analoga a quella che abbiamo adoprata per stabilire la relazione, che passa tra l'area del settore parabolico e lo spazio esterno compreso fra la direttrice e l'arco stesso (§ 151), la quale in sostanza non è che una applicazione del così detto principio dei limiti, ed a cui potremmo in aggiunta ed a maggiore schiarimento applicare con ragionamento analogo la dimostrazione all'assurdo della nota del paragrafo medesimo.

ma essendo  $\pi$  il solito rapporto della circonferenza al diametro, abbiamo dalla Geometria elementare

$$\text{area } ADad = \pi \times \overline{CA}^2.$$

Dunque avremo

$$\text{area } ABab : \pi \times \overline{CA}^2 :: CB : CA,$$

da cui facendo il prodotto dei medi e dividendolo per l'estremo cognito si ottiene

$$\text{area } ABab = \pi \times CA \times CB;$$

come ugualmente si otterrebbe dal secondo caso: perciò *date le lunghezze degli assi si misura la superficie della ellisse moltiplicando il prodotto dei semiassi pel rapporto della circonferenza al diametro.*

Per esempio: facendo  $Aa = 54$  centimetri, e  $Bb = 27$  centimetri, il prodotto dei semiassi è

$$\frac{54}{2} \times \frac{27}{2} = 499,5,$$

e poichè

$$\pi = 3,1415926,$$

avremo  $\text{area } ABab = 3,1415926 \times 499,5;$

e quindi effettuata la moltiplicazione otterremo la misura della superficie della ellisse corrispondente di centimetri quadrati **1569,2.**

**230.** La misura della ellisse dà il modo di risolvere il seguente

**PROBLEMA.** *Descrivere un circolo che abbia la medesima superficie di una ellisse data  $ABab$  (fig. 160). Sull'asse maggiore  $Aa$  si riporti il semiasse minore  $Cb$  dal centro  $C$  in  $N$ , e sul segmento  $AN$  come diametro si descriva la semicirconferenza  $AMN$ , la quale taglierà in  $M$  il prolungamento dell'asse minore  $Bb$ . L'area del circolo  $MDmd$  descritto col raggio  $CM$  equivarrà alla superficie della ellisse  $ABab$ . Infatti l'area della ellisse sarà*

espressa da  $\pi \times CA \times CB$  (§ 229) e quella del circolo da  $\pi \times \overline{CM}^2$ ; ma per costruzione  $CA : CM :: CM : CB$ , ossia  $\overline{CM}^2 = CA \times CB$ ; dunque  $\pi \times \overline{CM}^2 = \pi \times CA \times CB$ , cioè le due superfici sono equivalenti.

231. La relazione fra la superficie della ellisse e del circolo (§ 228), da cui abbiamo dedotta la quadratura della ellisse (§ 229), è il principio fondamentale della misura di ogni porzione di superficie ellittica. Descritta col semiasse  $CA$  una circonferenza  $ADad$  (fig. 161) concentrica all'ellisse  $ABab$ , si conducano due corde qualunque  $Nn, N'n'$  parallele all'asse minore  $Bb$ . Pel principio suddetto avremo la proporzione  $MM'm'm : NN'n'n :: Bb : Aa$ ; ma i termini  $Bb$  ed  $Aa$  sono cogniti e la misura del segmento circolare  $NN'n'n$  si ottiene per mezzo della Geometria elementare. Dunque il valore del quarto termine  $MM'm'm$  si ottiene dividendo il prodotto dei medi per l'estremo cognito: cioè l'area del segmento ellittico formato da due corde parallele all'asse minore si misura dividendo per l'asse maggiore il prodotto numerico dell'asse minore del segmento circolare corrispondente.

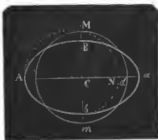


Fig. 160.



Fig. 161.

Se invece le due corde sono parallele all'asse maggiore, la misura del segmento ellittico si otterrà dividendo per l'asse minore il prodotto dell'asse maggiore pel segmento circolare corrispondente (§ 228).



232. Dal centro  $C$  (fig. 461) si conducano le rette  $CM$ ,  $CM'$ , ai punti  $M$ ,  $M'$  della ellisse, ed i raggi  $CN$ ,  $CN'$  ai punti  $N$ ,  $N'$  del circolo. Il settore ellittico  $MCM'$  si compone della somma del semisegmento  $MPP'M'$  e del triangolo  $P'CM'$ , diminuita del triangolo  $PCM$ , mentre il settore circolare  $NCN'$  si compone della somma del semisegmento circolare  $NPI'N'$ , e del triangolo  $P'CN'$ , diminuita del triangolo  $PCN$ ; ma i segmenti  $MPI'M'$ ,  $NPI'N'$ , abbiamo veduto che sono proporzionali agli assi, e dalla Geometria sappiamo che i triangoli  $P'CM'$ ,  $P'CN'$  di base uguale  $P'C$ , e i triangoli  $PCM$ ,  $PCN$  di base uguale  $PC$  sono rispettivamente proporzionali alle loro altezze, e per ciò proporzionali ai medesimi assi: dunque i settori staranno nella medesima ragione, ed avremo

$$\text{sett. } MCM' : \text{sett. } NCN' :: Bb : Aa,$$

da cui si rileva che l'area del settore ellittico si misura dividendo il prodotto numerico del settore circolare corrispondente e dell'asse minore, per l'asse maggiore.

233. Tirata la corda  $MM'$ , il segmento ellittico  $MSM'$  (fig. 464) si compone del settore  $MCM'S$  diminuito del triangolo  $MCM'$ , e perciò si misura l'area d'un segmento ellittico, formato da una corda qualunque, sottraendo dalla misura dell'area del settore (§ 232) che ha per base l'arco del segmento, quella dell'area del triangolo corrispondente che ha per base la corda del medesimo.

234. Se il segmento  $MM'R'R$  (fig. 464) da misurarsi sia formato da due corde qualunque  $MM'$ ,  $RR'$ , allora è chiaro che si misura l'area di un segmento ellittico formato da due corde, prendendo la differenza delle misure dell'aree dei segmenti formati da ciascuna corda (§ 233).

**Ellissoide.** — 235. La superficie di rivoluzione (§ 13), che si supponga generata da una ellisse che giri intorno ad uno de' suoi assi si chiama *ellissoide*. Se la rivoluzione si fa intorno all'asse maggiore essa si dice *ellissoide allungata* e prende una forma simile a quella dell'uovo; quando si fa intorno all'asse

minore si nomina *ellissoide compressa*, e rassomiglia alla forma di una arancia o meglio di una cipolla.

236. Dalla generazione della ellissoide se ne deduce che :

1° Ogni sezione fatta da un piano perpendicolare all'asse di rotazione è un circolo ;

2° Le sezioni fatte dai piani che passano per l'asse medesimo, ossia le ellissi meridiane, sono uguali all'ellisse generatrice ;

3° Qualunque sezione fatta da un piano che tagli obliquamente l'asse di rotazione è una ellisse differente dalla generatrice ;

4° Nell'ellissoide allungata i fuochi di tutte le ellissi meridiane sono situati sull'asse di rotazione nei punti stessi ove si trovano quelli dell'ellisse generatrice, ed i loro vertici coincidono coi poli della superficie ;

5° Nell'ellissoide compressa i fuochi delle ellissi meridiane sono situati distintamente sopra il cerchio generato dai fuochi della ellisse generatrice, ed i vertici sul cerchio massimo generato dai vertici della medesima ;

6° In ambedue le ellissoidi ogni piano meridiano divide la superficie in due parti uguali e simmetriche, ed è perciò un piano di simmetria ;

7° Il cerchio massimo perpendicolare all'asse di rotazione è pure un piano di simmetria in ambedue le ellissoidi ;

8° La normale condotta ad un punto di un'ellisse meridiana è pure normale all'ellissoide nel punto medesimo ;

9° Il piano perpendicolare alla normale nel punto ove essa incontra la superficie è tangente alla ellissoide, ed ogni retta tracciata su di esso che passi pel punto di contatto è una *tangente*.

237. Le superficie delle ellissoidi allungata e compressa si costruiscono sul tornio in un modo analogo alla loro generazione. Determinata l'ellisse generatrice si forma una sagoma o guida uguale alla sua metà data dall'asse maggiore se si tratta

di un'ellissoide allungata, o data dal minore se di una ellissoide compressa. Facendo coincidere l'asse maggiore o l'asse minore della sagoma coll'asse di rotazione del tornio, uno strumento operatore guidato dalla sagoma potrà costruire l'ellissoide allungata, o la compressa.

238. Nell'arte di fabbricare occorre talvolta di coprire uno spazio cilindrico a base circolare con una cupola in volta *a sesto scemo* o a *sesto rialzato*; nel primo caso può impiegarsi una semi-ellissoide compressa e nel secondo una semi-ellissoide allungata, di cui gli assi di rotazione coincidano con quello verticale del cilindro. Se il cilindro fosse a base ellittica può pure coprirsi con una cupola della forma di una semi-ellissoide compressa, o allungata, la quale avrà invece l'asse di rotazione orizzontale, e la prima avrà un *sesto* più rialzato della seconda. Per render più distinto l'eco delle sale parlanti alle pareti del

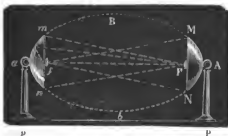


Fig. 162.

cilindro ellittico si sovrappone una ellissoide allungata (§ 183, e nota 1).

239. Nei gabinetti di Fisica talvolta si fa uso di riflettori metallici costruiti in forma di callotte di el-

lissoide allungata. Le sezioni che danno luogo a queste callotte sono fatte in una ellissoide  $aBAb$  (fig. 162) da piani  $mn$ ,  $MN$  perpendicolari all'asse di rotazione  $aA$  e che passino presso i fuochi  $f$ ,  $F$ ; per cui i lembi dei riflettori sono due cerchi (§ 236, 4°). Siccome nei fuochi  $f$ ,  $F$  si confondono quelli di tutte le ellissi meridiane (§ 236, 4°) tutti i raggi che emanano da una sorgente di calore o di luce posta in uno dei fuochi  $f$  dopo aver colpito la superficie concava della callotta  $man$  o della  $MAN$  avranno la proprietà (§ 183) di riflettersi nell'altra  $F$  della callotta  $MAN$ .

e riscaldcranno e perfino bruceranno, o illumineranno un corpo posto in questo punto, mentre ogni altro corpo situato fuori del medesimo non risentirà nè calore nè luce, o al più sarà debolmente riscaldato e illuminato dai pochi raggi lanciati direttamente. Se si inpiegasse un solo riflettore *man*, il corpo *F* sarebbe riscaldato o illuminato con minore intensità, perchè esso non riceverebbe che i raggi riflessi soltanto dall'unico riflettore *man*. In ogni caso nelle esperienze i riflettori non possono collocarsi che ad una sola distanza corrispondente alla doppia eccentricità  $\sqrt{F}$  della ellissoide alla quale appartengono.

240. Supponendo che l'asse di rotazione *Vb* di una ellissoide *aMNAb* (fig. 163) passi pel centro *C* di una sfera *VNOM*, o coincida con quello di un cono retto circolare *BVD* o di un cilindro retto circolare *SPQR*, la intersezione della ellissoide con ciascuna superficie dei tre corpi rotondi è un circolo; infatti la generazione



Fig. 163.

dell'una come delle altre facendosi per una rivoluzione intorno all'asse comune *Vb*, in questo movimento il punto *M* ove si tagliano le linee generatrici dell'ellissoide con la superficie di ciascuno dei corpi rotondi descriverà un circolo che apparterrà all'ellissoide come ad ognuna delle altre superficie. In qualunque altra posizione si trovino i tre corpi rotondi la intersezione talvolta può

esser una ellisse, ed il più sovente una curva a doppia curvatura.

Questi principii, e le considerazioni a cui ci condurrebbero le intersezioni che nascono dal combinare la ellissoide con qualunque superficie danno luogo ad importantissime applicazioni alle arti e specialmente al taglio delle pietre ed alle ombre; ma tuttociò non essendo di competenza di queste lezioni, rimandiamo gli artisti, a cui importa lo studio di simili applicazioni, ai trattati speciali di Geometria descrittiva.

**Misura della ellissoide.** — 241. La misura della superficie di una ellissoide non si può ottenere che approssimativamente impiegando un metodo applicabile a tutte le superficie di rivoluzione, facendo cioè la somma delle misure delle superficie dei coni e dei tronchi di cono di cui si può supporre composta. Lo stesso si farà per la misura di una porzione qualunque di superficie. Per valutare però le superficie di questi coni e di questi tronchi di coni è d'uopo di determinare i loro apotemi, e i diametri dei cerchi che loro servono di base. Quando sieno noti gli assi  $Aa$ ,  $Bb$  (fig. 164) della ellisse generatrice, si costruisca la curva, e poi si conducano in una sua metà le rette  $Dd$ ,  $Ee$ ,  $Ff$ ,  $Gg$ , ec. parallele all'asse maggiore  $Aa$  se l'ellissoide

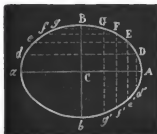


Fig. 164.

è compressa, o le rette  $Dd'$ ,  $Ee'$ ,  $Ff'$ ,  $Gg'$ , ec. parallele all'asse minore se allungata. Le prime parallele saranno i diametri delle circonferenze delle basi dei tronchi di cono componenti l'ellissoide compressa, e le seconde i diametri delle basi dei tronchi di cono componenti l'allungata, e le distanze

$DE$ ,  $EF$ ,  $FG$ , ec. i loro comuni apotemi. Con questi elementi la Geometria elementare ci somministrerà le misure di tutte le superficie dei tronchi di cono, e del cono che ha il vertice comune con quello della ellisse; ed infine presa e raddoppiata la loro somma, avremo la intera superficie dell'una o dell'altra ellissoide, e sarà tanto più prossima alla vera quanto più le parallele condotte nella generatrice saranno vicine fra loro.

Se gli assi non fossero conosciuti, per determinarli si prenda un telaio rettangolare, capace di allungarsi e allargarsi: sullo spigolo di ciascun lato vi sia un indice che si trovi sempre sulla metà. Presentando il telaio all'ellissoide, in modo che gli spigoli dei quattro lati tocchino la superficie nei loro punti di

mezzo, quando saremmo giunti ad ottenere il massimo ingrandimento del telaio, allora il lato più grande rappresenterà la lunghezza dell'asse maggiore ed il più piccolo quella del minore. Dipoi si procederà col metodo esposto.

242. La Geometria analitica dimostra che il volume compreso da una ellissoide equivale a due terzi di quello del cilindro retto che ha per altezza l'asse di rotazione e per base il massimo *cerchio parallelo*.<sup>1</sup> Da questo principio fondamentale di equivalenza ne consegue che: 1° *L'ellissoide allungata e l'ellissoide compressa non racchiudono lo stesso volume, e la prima sta alla seconda come l'asse minore al maggiore*; 2° *Si misura la solidità dell'ellissoide allungata prendendo i due terzi del prodotto numerico che si ottiene moltiplicando la misura del circolo che ha per diametro l'asse minore, per la lunghezza dell'asse maggiore*; 3° *La misura dell'ellissoide compressa si ottiene prendendo i due terzi dell'area del circolo che ha per diametro l'asse maggiore moltiplicata per l'asse minore*.

<sup>1</sup> Il volume  $V$  dei solidi di rivoluzione esprimendosi generalmente con  $V = \pi \int y^2 dx$  ed essendo  $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2a - x)x$  l'equazione della ellisse ove  $b$  ed  $a$  sono i semiassi minore e maggiore, avremo per l'ellissoide  $V = \pi \int \frac{b^2}{a^2} (2a - x)x dx = \pi \times \frac{b^2}{a^2} x^2 \left( a - \frac{x}{3} \right)$ , in cui facendo  $x = 2a$  e riducendo, avremo per l'ellissoide allungata

$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times a \times b^2,$$

ossia poichè  $2a = Aa$ ,  $b = CB$  (fig. 464), sarà

$$(1) \quad V = \frac{2}{3} \times \pi \overline{CB}^2 \times Aa, \text{ in cui } \pi \overline{CB}^2 \times Aa \text{ esprime il volume del}$$

cilindro di base  $\pi \overline{CB}^2$  e di altezza  $Aa$ . Cangiando nell'equazione generale  $y$  in  $x$  e viceversa, e sostituendo il valor di  $x$  tratto dall'equazione della curva, ed infine facendo  $y = 2b$ , avremo similmente per l'ellissoide compressa (2)  $V' = \frac{2}{3} \times \pi \overline{CA}^2 \times Bb$ . E paragonando i valori (1)

$$\text{e (2) avremo} \quad V : V' :: Bb : Aa.$$

## Iperbola.

### LEZIONE DECIMATERZA.

*Proprietà geometriche della Iperbola. — Diametri e Asintoti. — Tangenti e Normali. — Descrizione e costruzione della Iperbola. — Misura della Iperbola, e Iperboloide.*

**Proprietà geometriche della iperbola.** — 243. L'ultima fra le sezioni coniche, la *Iperbola*, non viene impiegata quanto la ellisse, e la sua utilità si limita ad alcuni casi ed in certe arti; ciò dipende dal non esser quella curva chiusa come questa. Ciononostante la conoscenza delle sue proprietà e dei metodi di costruzione sarà importante pei costruttori di stromenti matematici, pei disegnatori, per gl'incisori, e pei litografi che devono eseguire le tavole di libri di matematica. La iperbola gode di moltissime proprietà, la maggior parte delle quali sono analoghe a quelle della ellisse.<sup>1</sup> Per amor di brevità e per non togliere un tempo prezioso agli artisti coll'occuparli in uno studio non richiesto dagli stretti bisogni delle loro industrie saremo più concisi, e tralascieremo di ripetere le dimostrazioni che sono analoghe a quelle date per la ellisse.

244. In pratica non si considera che una sola branca di

<sup>1</sup> Dalla equazione generale delle sezioni coniche  $y = px \mp \frac{px^2}{na}$  già da noi richiamata (§ 105 nota 4) si argomenta a priori questa analogia, poichè l'equazioni delle due curve non differiscono che pel segno.

iperbola, ma per fissare le idee supponiamo di avere due branche  $MA'M'$ ,  $NaN'$  (fig. 165). La porzione  $Aa$  dell'asse limitata



Fig. 165.

dalle due curve, come nella ellisse, si chiama asse *maggior*e, *primo*, o *trasverso*; il punto di mezzo  $C$  ed i punti  $A$ ,  $a$  sono il *centro* ed i *vertici* della iperbola (§§ 103, 104). La perpendicolare indefinita elevata sopra  $Aa$  nel punto  $C$  è un secondo asse illimitato;

ma supponendolo definito dalle curve  $MBN$ ,  $M'bN'$  della rispettiva *iperbola coniugata* (§ 104), la sua porzione  $Bb$  si dice asse *minore*, *secondo* o *coniugato* della iperbola data. In generale in due *iperbole coniugate* l'asse maggior di una è il minore dell'altra e viceversa. Riportando poi la retta  $AB$  che unisce gli estremi degli assi, da  $C$  in  $F$  e in  $f$ , i punti  $F$ ,  $f$  sono i *fuochi*, la porzione  $CF = Cf$  ne è la *eccentricità*, ed in fine le rette  $FM$ ,  $fM$  condotte dai fuochi  $F$ ,  $f$  ad un punto qualunque  $M$  della curva sono i *raggi vettori* della iperbola.

245. Ora, come nella ellisse, con costruzioni e dimostrazioni analoghe giungeremo a stabilire anco per l'iperbola (fig. 165) i principii seguenti:

$$1^{\circ} \dots \left\{ \begin{array}{l} \overline{MP}^2 : \overline{mp}^2 :: AP \cdot Pa : Ap \cdot pa \\ \overline{MQ}^2 : \overline{mq}^2 :: BQ \cdot qb : Bq \cdot qb \end{array} \right.$$

cioè: i quadrati delle ordinate parallele agli assi sono proporzionali ai rettangoli delle ascisse corrispondenti (§§ 167, 170 1°).

$$2^{\circ} \dots \left\{ \begin{array}{l} \overline{MP}^2 : AP \cdot Pa :: \overline{CB}^2 : \overline{CA}^2 \\ \overline{Mq}^2 : Bq \cdot qb :: \overline{CA}^2 : \overline{CB}^2 \end{array} \right.$$

cioè: il quadrato di un'ordinata sta al rettangolo delle ascisse prese sull'asse maggior come il quadrato dell'asse minore sta



al quadrato dell'asse maggiore e viceversa rispetto all'asse minore (§§ 168, 170).

$$3^{\circ} \dots \dots \dots rr' = RR' : Bb :: Bb : Aa \text{ cioè :}$$

La doppia ordinata che passa pei fuochi, ossia il parametro, è sempre terzo proporzionale dopo gli assi (§ 169).

4° I rami della curva sono uguali e simmetrici anco intorno all'asse minore, ossia all'asse illimitato (§§ 103, 170, 2°).

5° Le ordinate all'asse minore crescono e scemano col crescere o collo scemare delle ordinate all'asse maggiore (§ 170 3°).

$$6^{\circ} \dots \dots \dots fM - lM = Aa \text{ cioè :}$$

La differenza dei raggi vettori condotti ad uno stesso punto della curva è sempre uguale all'asse maggiore (§ 172).<sup>1</sup>

**Diametri e asintoti.** — 246. Anco rispetto ai diametri la iperbola gode come la ellisse delle seguenti proprietà, alle quali possono applicarsi le medesime dimostrazioni.

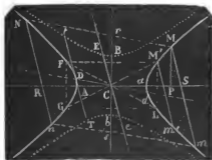


Fig. 166.

1° Ogni corda  $Dd$  (fig. 166) che passa pel centro  $C$  vi resta divisa in due parti uguali, e si chiama parimente *diametro* (§§ 184, 185).

2° Ogni altra retta indefinita  $Ee$  parallela alla tangente  $Tt$  condotta ad una estremità del dia-

metro  $Dd$  è detta *diametro illimitato*, ed ambedue i diametri

<sup>1</sup> Si noti che essendo per costruzione (fig. 165)

$$\overline{CF}^2 = \overline{Cf}^2 = \overline{AB}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{CB}^2,$$

cioè il quadrato della eccentricità uguale alla somma dei quadrati dei semiassi, nei calcoli dovremo sostituire questo valore invece di quello dato per la differenza dei quadrati degli assi, che si impiegava per la ellisse.

*Dd*, *Ee* si chiamano *diametri coniugati*<sup>1</sup> (§ 185). I diametri coniugati si possono prendere per assi delle coordinate.

3° I quadrati delle ordinate ai diametri sono proporzionali ai rettangoli delle ascisse corrispondenti (nota 4 del § 189) e perciò :

4° Ogni diametro *Dd* o il suo prolungamento divide per metà tutte le corde *Nn*, *Mm*, *M'm'* ec. parallele al suo coniugato *Ee*, o alla tangente *Tt* condotta ad una sua estremità (§ 186).

5° Nella iperbola esiste un'infinità di coppie di diametri uguali, per esempio, *M'G*, *FL*, che sono le diagonali di un rettangolo *FGLM'* formato da corde parallele agli assi (§ 185).

6° Due corde parallele qualunque *Mm*, *Nn* condotte per due punti *R*, *S* dell'asse maggiore, o *NM*, *nm* condotte per due punti *r*, *s* dell'asse minore ugualmente distanti dal centro *C* sono della medesima lunghezza (§ 187).

7° Ogni diametro *Dd* divide la iperbola in due parti uguali ed opposte (§ 187).

247. Queste proprietà serviranno, come abbiam fatto per la ellisse, a trovare il centro<sup>2</sup> e gli assi di una iperbola data (§ 188). Per averne i fuochi (§ 244) ed il parametro (§ 245 3°) è necessario trovar prima la lunghezza dell'asse minore. A tale effetto si conduca all'asse maggiore già trovato una ordinata qualunque *MP* (*fig.* 166), ed essendo

$$MP^2 : AP \cdot Pa :: \overline{AC}^2 : \overline{BC}^2 \quad (\S 245, 2^o)$$

<sup>1</sup> Supponendo una iperbola coniugata, le sue curve taglieranno il diametro illimitato in due punti *E*, *e* ugualmente distanti dal centro, e il diametro *Ee* così definito sarà propriamente il coniugato di *Dd*. Viceversa il diametro *Dd* sarà coniugato della iperbola coniugata.

<sup>2</sup> Nell'applicare all'iperbola il problema del § 188 è da avvertire di non condurre le parallele da branca a branca, poichè la linea retta condotta per i loro punti di mezzo sarebbe un diametro illimitato. Se è data una sola branca si condurrà un'altra coppia di parallele per averne il centro come al § 209.

si cercherà una media proporzionale fra  $AP$  e  $Pa$ , e quindi una quarta proporzionale determinata fra  $MP$ , la media trovata, ed il semiasse maggiore, sarà il semiasse minore richiesto.

248. Fra tutti i diametri illimitati (§ 246 2°) compresi negli angoli formati dagli assi (fig. 467) ve ne hanno due  $Ss$ ,  $S's'$



Fig. 167.

ugualmente inclinati sui medesimi, che prolungati quanto si voglia si avvicinano continuamente ai rami della curva senza toccarli giammai. Queste rette sono appunto quelle che già abbiamo chiamate *asintoti*, e che poste ad angolo retto distinguono la iperbola col nome di *equilatera* (§ 404). Dati o trovati

gli assi  $Aa$ ,  $Bb$  di una iperbola si determinano facilmente gli asintoti, compiendo con essi il rettangolo  $RR'rr'$ , e conducendo le diagonali  $Rr$ ,  $R'r'$  prolungate quanto occorre. Viceversa dati gli asintoti  $Ss$ ,  $S's'$  e le eccentricità di una iperbola, si determina l'asse maggiore prendendo  $CR$  e  $CR'$  uguali all'eccentricità; ed abbassando da  $R$  ed  $R'$  le perpendicolari  $Ra$ ,  $R'A$  sulla linea che divide per metà l'angolo  $SCs'$ , e prendendone la porzione  $Aa$ , e la indefinita  $Bb$  perpendicolare ad  $Aa$  nel punto  $C$  sarà l'asse illimitato che diverrà finito, secondo che ne abbiamo insegnato di sopra (§ 247).

249. La Geometria dimostra che conducendo la doppia  $Mm$  (fig. 468) ordinata ad un diametro qualunque  $Dd$  prolungata fino che incontra gli asintoti in  $N$ ,  $n$ , le porzioni  $NM$ ,  $mn$  della intera  $Nn$  intercette fra la curva e gli asintoti sono sempre uguali. <sup>1</sup>

<sup>1</sup> Per dimostrare questo principio primieramente pel punto  $M$  (fig. 468) si faccia passare la  $N'n'$  perpendicolare all'asse  $Aa$ , ed avremo

$$N'M = PN' - MP, \text{ ed } Mn' = PN' + MP,$$

che moltiplicate insieme danno

$$(1) N'M \times Mn' = (PN' - MP) (PN' + MP) = \overline{PN'}^2 - \overline{MP}^2;$$

Da questa proprietà ne consegue che la intera  $Nn$  resta divisa dal diametro  $Dd$  parimente in due parti uguali. Ciò posto, dal punto  $D$  si conduca  $DE$  parallela all'asintoto  $CN$  più

ma dal vertice  $A$  elevando sull'asse la perpendicolare  $AR$ , i triangoli simili  $CAR$ ,  $CPN'$  danno

$$CA : AR :: CP : PN' :$$

d'onde essendo  $AR$  uguale al semiasse minore  $CB$  si ha

$$PN' = \frac{CB \times CP}{CA} \text{ ed avendo } AP = CP - CA, Pa = CP + CA$$

dalla proprietà già rammentata (§ 245, 7<sup>o</sup>) si rileva

$$\overline{MP}^2 = \frac{\overline{CB}^2}{CA^2} \times AP \cdot Pa = \frac{\overline{CB}^2}{CA^2} (\overline{CP}^2 - \overline{CA}^2)$$

dunque sostituendo nella (1) e riducendo, avremo (2)  $N'M \times M'n' = \overline{CB}^2$ . In secondo luogo conducendo fra gli asintoti da un secondo punto qualunque  $L$  le rette  $Gg$ ,  $G'g'$  parallele rispettivamente alle rette  $Nn$ ,  $N'n'$  avremo

$$\begin{aligned} NM : N'M :: GL : G'L \\ Mn : M'n' :: Lg : Lg', \end{aligned}$$

che moltiplicate insieme daranno

$$NM \times Mn : N'M \times M'n' :: GL \times Lg : G'L \times Lg',$$

ma per la (2) abbiamo

$$N'M \times M'n' = \overline{CB}^2 = GL \times Lg' ;$$

dunque sarà

$$NM \times Mn = GL \times Lg,$$

e per la stessa ragione  $Nm \times mn = Gl \times lg$ . Ora se i punti  $L$ ,  $l$  si avvicino fra loro fino a coincidere in un sol punto  $D$ , la retta  $Gg$  si cangerà nella tangente  $TDt$ , ed avremo tuttavia

$$GL \times Lg = TD \times Dt = Gl \times lg,$$

onde  $NM \times Mn = Nm \times mn$ ; ma  $Mn = Mm + mn$ ,  $Nm = Nm + NM$ ;

dunque sostituendo e riducendo avremo  $NM = mn$ , come pure  $TD = Dt$  come si voleva dimostrare.

lontano fino che incontra in *E* il coniugato *Ee*. I triangoli *CEO*, *CNn* essendo simili per avere i lati due a due paralleli, ed essendo simili per la stessa ragione i triangoli *CED*, *CNQ*, daranno rispettivamente

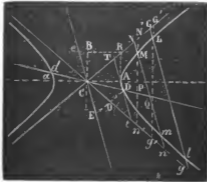


Fig. 168.

$$\begin{cases} CE : EO :: Nn : CN \\ CE : ED :: NQ : CN, \end{cases}$$

dalle quali si ottiene

$$EO : ED :: NQ : Nn;$$

ma abbiamo posto che  $NQ = Qn$ , ossia *Nn* doppio di *NQ*, dunque *ED* è doppio di *EO*, ossia  $EO = OD$ . Perciò col mezzo degli asintoti e dato un diametro limitato *Dd* si trova il suo coniugato *Ee* tirando per *D* la *DE* parallela all'asintoto più lontano *CN*, e riportata *OD* da *O* in *E*, facendo passare una retta per i punti *C* ed *E*.

**Tangenti e normali.** — 250. Per condurre una tangente *MT* ad un punto *M* dell' Iperbola (*fig. 169*) si procede analogamente a quante fu dimostrato e fatto per la ellisse.

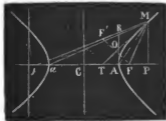


Fig. 169.

4° Essendo noti l'asse maggiore ed i fuochi, si conducono i raggi vettori *MF*, *Mf*, e si riporta *MF* sull' altro *Mf* da *M* in *F'*, di poi sulla *FF'*, che unisce i punti *F*, *F'* si abbassa la perpendicolare *MT* che sarà la tangente in *M* (§ 177).

2° Conoscendo della curva soltanto l'asse maggiore, la tangente *MT* al punto *M* si determina tirando le rette *Ma*, *MA* ed elevando dal vertice *A* la perpendicolare *AR*, e quindi fa-

cendo passare la  $MT$  per  $M$  ed il punto di mezzo  $O$  di  $AR$ . (§ 178).

3° E per maggior semplicità abbassando la ordinata  $MP$  e prendendo un segmento  $CT$  terzo proporzionale dopo l'ascissa  $CP$  ed il semiasse  $CA$ , si può tirare per  $T$  ed  $M$  la  $MT$ , che sarà la tangente richiesta (§ 179).

251. Gli asintoti somministrano un mezzo facile per condurre una tangente alla iperbola da un punto preso sulla curva. Infatti ritenuta la stessa costruzione della *fig. 168* (§ 249 e nota 1) nel triangolo  $Tct$  essendo  $DT = Dt$  sarà pure  $CO = Ot$ ; perciò per condurre una tangente al punto  $D$  preso sulla curva si tirerà  $DO$  parallela ad uno degli asintoti fino che incontra l'altro, e riportato  $CO$  da  $O$  in  $t$ , per  $D$  e per  $t$  si farà passare una retta  $Tt$ .

252. Quando si voglia condurre una tangente all'iperbola per un punto dato  $n$  situato fuori della curva (*fig. 170*) prati-

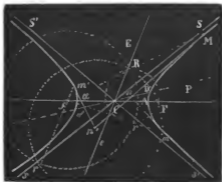


Fig. 170.

cheremo le stesse costruzioni fatte per la ellisse cioè: 1° Se il punto  $n$  è situato in un angolo  $SCS'$  degli asintoti che comprende la branca  $MAm$ , fattovi centro col raggio  $nF$  uguale alla distanza da uno dei fuochi  $F$ , si descrive l'arco  $RrF$ , e fatto centro

nell'altro fuoco  $f$  col raggio  $fR$  uguale all'asse maggiore  $Aa$  si descrive un secondo arco  $Rr$ , che taglierà il primo nei punti  $R, r$ , e dipoi per  $f$  e pei punti d'intersezione  $R, r$ , si fanno passare le rette  $fM, fm$ , finchè incontrano la curva nei punti  $M, m$ , i quali saranno i punti di contatto (§ 180); perciò le

$nM$ ,  $nm$  che gli uniscono col dato  $n$  saranno le due tangenti che si possono condurre ad una medesima branca  $MAm$  d'iperbola da un punto dato  $n$  fuori di essa. Se il punto  $n$  è situato in  $n'$  nell'angolo adiacente  $sCs'$ , l'operazione è identica come apparisce dalla figura, e mentre la retta  $n'M$  è tangente alla branca  $MAm'$ , la retta  $n'm'$  lo è alla branca opposta. In pratica è d'uopo che il punto  $n$  o  $n'$  sia talmente posto che l'operazione si renda eseguibile, cioè che le rette  $fR$ ,  $fr$  prolungate vadano ad incontrar la curva in punti che non cadano fuori del disegno, e sotto un angolo quanto si può maggiore per rendere più esattamente distinti i punti medesimi. 2° Pel punto  $n$  si fa passare il diametro limitato  $Dd$ , si riporta da  $C$  in  $P$  una terza proporzionale dopo  $Cn$  e  $CD$ , e per  $P$  si conduce la corda  $Mm$  parallela al coniugato di  $Dd$  (§ 249). I punti estremi  $M$ ,  $m$  di essa saranno i punti di contatto; e perciò le rette  $nM$   $nm$  di unione saranno le tangenti richieste (§§ 489, nota 4, e 490).

La prima delle precedenti regole insegna a condurre perpendicolarmente o parallelamente ad una retta data una tangente all'iperbola come abbiám fatto per la ellisse (§ 484).

253. In generale per determinare una normale a questa curva basta elevare una perpendicolare sulla tangente nel

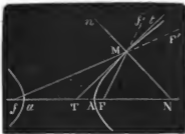


Fig. 471.

punto di contatto. Però dalla proprietà che ha la tangente  $MT$  ad un punto  $M$  della curva (*fig. 171*) di dividere per metà l'angolo  $fM$  formato dai raggi vettori  $fM$ ,  $Mf$  (§ 250, 4<sup>o</sup>), ne consegue che condotta la  $nN$  perpendicolare ad  $MT$  nel punto  $M$ , e prolungati i raggi vettori, gli angoli interni  $FMN$ ,  $F'MN$  sono uguali, ed uguali pure gli angoli esterni  $fMn$ ,  $f'Mn$ : perciò si conduce una normale alla iperbola da un punto preso sulla curva

*dividendo per metà l'angolo formato da uno dei raggi vettori e dal prolungamento dell'altro.*

254. Dalla proprietà della normale di dividere per metà l'angolo formato da un raggio vettore e dal prolungamento dell'altro si deduce che ogni raggio FM di luce, o di calore, o di suono (*fig. 171*), emanato da un fuoco F di una iperbola viene riflesso dalla concavità della branca che lo racchiude secondo una retta MF', che prolungata passerebbe per l'altro fuoco f, e viceversa. Di più se si fa astrazione dalla branca opposta, un secondo raggio fM che emanasse dal rispettivo fuoco f verrebbe riflesso dalla convessità della prima branca secondo una retta Mf', che prolungata passerebbe pel primo fuoco F, e viceversa. Di questa fisica proprietà della iperbola si può fare una utilissima applicazione alla costruzione dei camminetti. Ordinariamente si impiega un prisma a tre facce, ma il calore non viene riflesso nella camera uniformemente e nella sua totalità, e vedremo che meglio si riscalda l'ambiente costruendo il cammino con un cilindro parabolico (§ 127). E quando si impieghi un cilindro iperbolico, i raggi calorifici oltre a riflettersi tutti formeranno un fascio conico e divergeranno fra loro a misura che attraversano l'ambiente, e perciò maggiore sarà lo spazio che dovranno attraversare, e che quindi riscalderanno.

**Descrizione e costruzione della Iperbola.**—255. Ai pari della ellisse si offrono diversi metodi per descrivere graficamente la iperbola e vari processi per costruirla meccanicamente: ma noi parleremo per brevità di quelli che più semplicemente si prestano alla esecuzione pratica.

**METODO DEI RAGGI VETTORI** — *Descrivere la Iperbola per punti, date la distanza dei fuochi f, F e la lunghezza dell'asse maggiore Aa*<sup>1</sup> (*fig. 172*). Al di là della eccentricità CF si prendano a pia-

<sup>1</sup> Se invece fossero date le lunghezze degli assi Aa, Bb si pongono due rette uguali a quelle lunghezze che si taglino ad angolo retto nel



cere i punti  $p, p', p'', p'''$ , ec. e facendo centro in  $f$  coi raggi  $ap, ap', ap'', ap'''$ , ec. si descrivano successivamente gli archi  $mn, m'n', m''n'', m'''n'''$  ec. e dipoi facendo centro in  $F$  coi raggi  $Ap, Ap', Ap'', Ap'''$ , ec. si descrivano altrettanti archi che taglino



Fig. 172.

rispettivamente i primi nei punti  $m, m', m'', m'''$  ec., al di sopra dell'asse  $Aa$ , e nei punti  $n, n', n'', n'''$  ec. al di sotto. Per tutti i punti così determinati si farà passare una linea continua, che sarà evidentemente una branca di iperbole (§ 245 6°). Nello stesso modo si opererà per de-

scrivere la branca opposta.

256. Volendo cseguire meccanicamente questa descrizione della iperbole si faccia girare un regolo  $fR$  (fig. 173) per una sua estremità in un chiodo infisso in un fuoco  $f$ , in modo che il chiodo si trovi sulla direzione dello spigolo del regolo. Se ponendo lo spigolo del regolo a contatto dell'asse  $aA$  si fissi all'altra estremità  $R$  il capo di una corda, e fatta passare attorno al vertice  $A$  si fissi ad un chiodo posto nell'altro fuoco  $F$ , e se facendo girare il regolo intorno al chiodo  $f$  con un lapis  $M$  si tenga tesa la corda, e si percorra continuamente lo spigolo del regolo, se-gneremo la branca di iperbole  $MAM$ : infatti è per costruzione

loro punto di mezzo  $C$ , e si determinano i fuochi come è stato insegnato (§ 244), e così si ricadrà nell'enunciato medesimo. La descrizione della iperbole può eseguirsi anco sopra altri dati di costruzione, come sopra *i fuochi e un punto qualunque, o i vertici ed un punto qualunque* ec. ma siccome non è frequente di adoprare questa curva nelle arti e specialmente da soddisfare a quei dati, dopo quanto è stato detto sulla ellisse crediamo di non dilungarci maggiormente, rilasciando alle esercitazioni degli studiosi l'applicarlo in questi casi.

$fR = Aa + FM + MR$ ; ma abbiamo  $fR = fM + MR$ , dunque sarà  $fM + MR = Aa + FM + MR$ , e perciò avremo

$$fM - FM = Aa \quad (\S 245, 6^\circ).$$

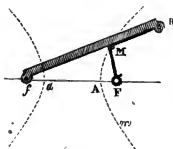


Fig. 173.

si possono imperniare a piacere lungo le righe  $F'R$ ,  $fr$ , fissate le lunghezze dei regoli  $fF$ ,  $f'F'$  uguali alla distanza dei fuochi, e le distanze  $ff'$ ,  $FF'$  uguali all'asse maggiore  $Aa$ , una punta o

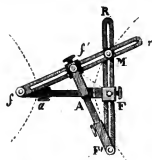


Fig. 174.

257. Ora con facilità si comprenderà il modo di agire dei seguenti *compassi iperbolici*.

Se le estremità  $f$ ,  $F'$  di due regoli incrociati  $fF$ ,  $f'F'$ , e capaci di allungarsi o accorciarsi a piacere (fig. 174), si impernano mobilmente nelle estremità di due righe canalate a giorno  $fR$ ,  $F'R$ , e se le altre estremità  $F$ ,  $f$

lapis  $M$  mosso continuamente lungo i canali di ambedue le righe descriverà la iperbola. Infatti tirando  $Ff'$  i triangoli  $f'FF'$ ,  $Fff'$  sono uguali perchè hanno la base comune  $Ff'$  e gli altri due lati uguali per costruzione, e quindi gli angoli  $f'FF'$ ,  $Fff'$  sono uguali: ma gli angoli supplementari  $MFf'$ ,  $Mf'F$  saranno pure uguali, e perciò  $MF = Mf'$ ; dunque

$$fM - FM = fM - F'M = f'F' = Aa \quad (\S\S 212, 245 6^\circ).$$

258. Si prenda una losanga  $fPF'Q$ , di cui i quattro regoli (fig. 175) sieno mobili intorno agli angoli. L'estremità  $Q$  di una riga  $QS$  sia impernata nell'angolo  $Q$ , mentre il pernio  $P$  dell'angolo opposto può scorrere nel canale a giorno della riga stessa; il pernio poi dell'angolo  $f$  si fissi a piacere sul regolo  $fF$ , ed il

pernio  $F'$  dell'angolo opposto nella estremità di una seconda riga  $F'R$ , nel canale della quale possa fissarsi mobilmente il pernio  $F$  posto nell'altra estremità del regolo  $fF$ . Con tale apparecchio ponendo i perni  $f$  e  $F$  distanti fra loro quanto la doppia eccentricità, e la distanza  $FF'$  uguale all'asse maggiore, con un lapis obbligato a scorrere contemporaneamente nei canali delle due righe descriveremo con movimento continuo la iperbole corrispondente: imperocchè tirando  $fM$ , il punto  $M$  sarà ugualmente distante da  $f$  e da  $F'$ , e perciò avremo

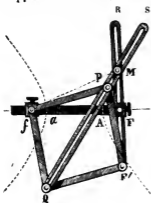


Fig. 175.

$fM - FM = F'M - MF = FF' = 2a$   
 (§§ 213, 243 6°). Qui pure varrà la stessa avvertenza fatta per la ellisse sulla lunghezza dei regoli della losanga (§ 213).

$$fM - FM = F'M - MF = FF' = 2a$$

(§§ 213, 243 6°). Qui pure varrà la stessa avvertenza fatta per la

ellisse sulla lunghezza dei regoli della losanga (§ 213).

259. METODO DEGLI ASINTOTI. — *Descrivere per punti la iperbole, dati gli asintoti  $Ss$ ,  $S's'$  ed un punto qualunque  $M$ .* <sup>1</sup> (fig. 176). Pel punto  $M$  si conduca una retta qualunque  $Mn$ , e si riporti  $NM$  da  $n$  in  $m$ ; siccome le porzioni di ogni retta condotta fra essi e la curva sono uguali (§ 249 e nota 4), il punto  $m$  apparterrà alla curva. Ora pei punti  $M$ ,  $m$  si conducano altre due rette  $N'n'$ ,  $N''n''$ , e prendendo  $n'm' = NM$ ,  $m'n'' = n''m$ , i punti  $M'$ ,  $m'$  per la stessa ragione apparterranno alla curva, e così proseguiremmo a trovare altri punti col mezzo di quelli già determinati, fino a che saremo giunti ad avere un numero

<sup>1</sup> Se fossero dati gli asintoti ed i vertici  $A, a$  la descrizione non si eseguisce con alcun metodo speciale, poichè conducendo la retta  $aA$  che divida per metà l'angolo  $SCs$  degli asintoti (fig. 176), ed elevando da un vertice  $A$  una perpendicolare  $AB$  fin che incontra un asintoto in  $B$ , la porzione  $CB$  sarà l'eccentricità colla quale si determineranno i fuochi (§ 244), e quindi si ricaderà nei processi insegnati (§§ 255, al 258).

di punti assai vicini fra loro da indicare l'andamento della curva, ed unirli fra loro secondo il voluto grado di continuità (§§ 62 al 68). Nello stesso modo si opererà per la costruzione della branea opposta.

**Misura della iperbola. — Iperboloide. — 260.** La misura



Fig. 176

di una branea di iperbola non può ottenersi perchè i suoi rami si estendono all'infinito (§ 104); quella poi di un arco o una porzione qualunque della curva non potrà ottenersi che per approssimazione, applicando qualunque dei metodi generali che abbiamo esposti (§§ 70 al 76).

261. Anco la misura della superficie di un segmento o di un settore di iperbola compreso da una branca della curva, o

di una porzione di superficie compresa fra le due branche non può aversi che per approssimazione, applicando i metodi generali che abbiamo insegnati (§§ 78 all' 87). La geometria dimostra che la quadratura dell'iperbola equilatera dipende dalla rettificazione della parabola, e come dalla relazione che passa fra la superficie della iperbola equilatera e quella di un'iperbola qualunque di ugual asse maggiore possa ottenersi la quadratura di questa ultima; ma qui taceremo su tali considerazioni imperocchè oltre a non essere tanto elementari, le crediamo inutili nella ordinaria pratica delle arti.

262. Facendo girare le branche di una iperbola intorno ad uno dei suoi assi si genera una superficie di rivoluzione, che per la natura della generatrice non è chiusa nè limitata, e si chiama *Iperboloide di rivoluzione*. Se la rivoluzione si fa at-

torno l'asse maggiore o limitato l'iperboloide avrà due *nappe* distinte, generate ciascuna da una delle branche della iperbola, e distanti come esse della lunghezza dell'asse medesimo. Se invece la rivoluzione si fa attorno l'asse illimitato o minore, la iperboloidenon forma che una sola nappa concava convessa (§§ 11, 29, 30).

263. Da queste generazioni ne consegue :

1° Ogni sezione fatta da un piano nell'una o l'altra iperboloid e perpendicolare all'asse di rotazione è un circolo.

2° Tutte le sezioni fatte dai piani meridiani sono uguali alla iperbola generatrice, ed hanno nella iperboloid e a due nappe i fuochi comuni alla generatrice, e nella iperbola a una nappa hanno i fuochi situati sulla circonferenza descritta dai fuochi della generatrice medesima.

3° Ogni piano meridiano divide la iperboloid e in due parti uguali e simmetriche.

4° Ogni sezione fatta nell'una o nell'altra iperboloid e da un piano obliquo all'asse di rotazione è una ellisse o una iperbola differente dalla generatrice (§ 236).

Ambedue le iperboloidi si costruiscono sul tornio come la paraboloid e e la ellissoide (§§ 156, 237).

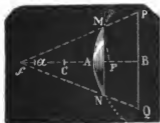


Fig. 177.

264. La iperboloid e a due nappe può utilmente applicarsi alla costruzione dei riflettori quando vogliasi disseminare la luce in uno spazio determinato più uniformemente e con minor perdita.

Per esempio si voglia illuminare una superficie piana come un quadro, di cui PQ sia la più grande dimensione (*fig. 177*) con un riflettore che abbia il diametro dato MN più piccolo, ed abbia la fiaccola F posta sulla retta fB perpendicolare sul mezzo B alla distanza FB. Prossimamente alla fiaccola F si elevi sopra fB una doppia perpendicolare uguale a MN, e pei punti M, P ed

N, Q si conducano le rette  $Pf$ ,  $Qf$  che si incontreranno in un medesimo punto  $f$  della retta  $fB$ . Tirata  $MF$  si prenda la metà della differenza  $fM - FM$  e si riporti da  $C$  mezzo di  $fF$  in  $A$  e in  $a$ , onde presi per fuochi i punti  $f$ ,  $F$  e per vertici i punti  $A$ ,  $a$  si descriverà coi noti processi (§§ 255 al 258) la branca della iperbole definita dai punti  $M$ ,  $N$  (§ 245 6<sup>o</sup>), della quale ci serviremo per linea generatrice nella costruzione del riflettore iperbolico  $MAN$  richiesto. È chiaro che i raggi di luce che partono dalla fiaccola  $F$  si rifletteranno nei punti  $M$ ,  $N$  del lembo del riflettore secondo le rette  $fP$ ,  $fQ$  (§ 254), e così se il quadro è circolare tutti i raggi estremi inviati dal riflettore saranno diretti ai punti estremi del quadro senza che alcuno ne vada inutilmente disperso.

Se la fiaccola  $F$  fosse più alta o più bassa del mezzo del quadro, allora s' inclinerà l'asse del riflettore in modo che due dei raggi estremi riflessi passino pei punti  $P$ ,  $Q$ .

L'iperboloide è la forma che pure deve darsi ai reverberi dei lampioni destinati ad illuminare le piazze pubbliche. Infatti si supponga di avere due, tre o più specchi iperbolici  $MAM'$ ,  $M'A'M''$ ,  $M''A''M'''$  ec. (fig. 178) uguali fra loro, e si dispongano



Fig. 178.

coi lembi successivamente in contatto, ed in modo che i loro assi si taglino nel fuoco comune  $f$ . Ponendo nei fuochi  $F$ ,  $F'$ ,  $F''$  opposti al comune  $f$  altrettante fiaccole, i raggi emanati da esse e riflessi dai re-

spectivi reverberi illumineranno uniformemente tutto lo spazio compreso dai lati dell'angolo  $M/M''$ . Perciò seguendo una tal disposizione il lampione si costruirà con reverberi di grandezza

ed in numero tali quali si stimeranno convenienti all'ampiezza dello spazio da illuminare.

265. La misura della superficie di una iperboloido a una nappa  $mam'MAMm$  terminata da due cerchi (fig. 179), o di una



Fig. 179.

callotta  $MAM'M$  di una iperboloido a due nappe terminata da un cerchio (§ 263) si otterrà col metodo analogo tenuto per l'ellissoide, cioè calcolando e sommando le superficie dei tronchi di cono e dei coni nei quali si sarà divisa la superficie

della iperboloido (§ 241).

266. Infine per ricubare la callotta di iperboloido a due nappe  $MAM'M$  terminata da un cerchio (fig. 179) si descrive la iperbola generatrice  $MAM'$  (§ 242), e se ne trovano il centro  $C$  e gli assi definiti  $aA$ ,  $bB$ , e dipoi si calcola la superficie di un cerchio avente il semiasse minore  $CB$  per raggio, e si divide per il triplo del quadrato numerico del semiasse maggiore  $CA$ , ed il quoziente ottenuto si moltiplica per la somma del prodotto del quadrato numerico della altezza  $AP$  pel triplo del semiasse  $CA$ , e del cubo numerico della stessa  $AP$ .<sup>1</sup>

Se invece la iperboloido è a una nappa (§ 263), cioè è gene-

<sup>1</sup> Ecco come è stata dedotta questa regola. Nella formula generale  $V = \pi \int y^2 dx$ , che esprime il volume  $V$  di un solido di rivoluzione, si sostituisca il valor di  $y^2$  dato dall'equazione della iperbola  $y^2 = \frac{b^2}{a^2} x(2a+x)$ , ed avremo  $V = \frac{\pi b^2}{a^2} \int (2ax dx + x^2 dx)$ , ossia integrando e riducendo,  $V = \frac{\pi b^2}{3a^2} (3ax^2 + x^3)$ , e nel nostro caso essendo

$$b = CB, a = CA, x = AP \text{ (fig. 179)}$$

$$\text{avremo } V = MAM'M = \frac{\pi \overline{CB}^2}{3 \cdot \overline{CA}^2} (3 \overline{CA} \cdot \overline{AP}^2 + \overline{AP}^3),$$

la qual formula esprime appunto la regola inseguita.

rata dall'iperbola  $MAM'$  che si avvolge intorno all'asse minore, e se si suppone terminata da due circoli che siano ad uguale distanza dal centro  $C$ , allora se ne misura il volume  $Mmam'M'A$  calcolando la superficie di un circolo che ha per raggio il semiasse maggiore  $CA$ , e si divide per il triplo del quadrato numerico del semiasse minore  $CB$ , ed il quoziente ottenuto si moltiplica per la somma del prodotto del quadrato numerico del semiasse minore  $CB$  pel triplo dell'altezza  $Qq$  del solido e del quarto del cubo numerico dell'altezza medesima.

Facendo poi l'altezza  $Qq$  uguale all'asse minore  $Bb$ , il volume  $Nnan'N'A$  dell'iperboloide corrispondente a una nappa si misura prendendo i quattro terzi della solidità di un cilindro che ha per base un circolo di raggio uguale al semiasse maggiore  $CA$  e per altezza l'intero asse minore  $Bb$ .<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Nella formula generale  $V = \pi \int y^2 dx$  che esprime il volume  $V$  del solido di rivoluzione, si cangi  $x$  in  $y$  e viceversa, e quindi si sostituisca il valor di  $x^2$  dato dall'equazione dell'iperbola  $x^2 = \frac{a^2}{b^2} (b^2 + y^2)$  riferita all'asse minore e colla origine delle coordinate al centro: avremo

$$V = \frac{\pi a^2}{b^2} \int (b^2 dy + y^2 dy),$$

dalla quale integrando e riducendo avremo  $V = \frac{\pi a^2}{3b^2} (3 \cdot b^2 \cdot y + y^3)$  e nel caso nostro (fig. 479) poichè  $a = CA$ ,  $b = CB$ ,  $y = CQ$ , sarà

$$V = \frac{\pi \overline{CA}^2}{3 \overline{CB}^2} (3 \overline{CB}^2 \cdot CQ + \overline{CQ}^3);$$

e raddoppiando avremo in primo luogo

$$Mmam'M'A = \frac{\pi \cdot \overline{CA}^2}{3 \overline{CB}^2} (3 \overline{CB}^2 \cdot Qq + \frac{Qq^3}{4});$$

ove facendo  $Qq = Bb = 2CB$  avremo in secondo luogo

$$Nnan'N'A = \frac{4}{3} \cdot \pi \overline{CA}^2 \cdot Bb;$$

nelle quali formole si leggono le regole indicate.



**DELLA CASSINOIDE, DELLA CATENARIA  
E DELLA LEMNISCATA.**

**LEZIONE DECIMAQUARTA.**

*Proprietà della Cassinoide. — Descrizione e costruzione della Cassinoide. — Applicazioni, tangenti e misura della Cassinoide. — Proprietà della Catenaria. — Descrizione e costruzione della Catenaria. — Tangenti e misura della Catenaria.*

**Cassinoide.**

**Proprietà della Cassinoide.** — 267. La curva piana e chiusa  $ABab$  (fig. 180) che rassomiglia alla Ellisse, nella quale il prodotto delle distanze  $fM$ ,  $FM$ , di un punto qualunque  $M$  a due punti fissi  $f$ ,  $F$  situati nell'interno è sempre il medesimo, si chiama *Cassinoide* dal nome del celebre Geometra ed Astronomo Gian-Domenico Cassini che il primo la propose.

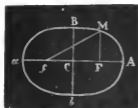


Fig. 180.

268. I punti  $f$ ,  $F$  (fig. 180) si chiameranno *fuochi* unicamente perchè servono a definire la curva, come servono i fuochi della ellisse, e le distanze  $fM$ ,  $FM$  ne saranno i *raggi vettori*. La porzione  $aA$  della retta, che passando pei fuochi è intercetta dalla curva, si chiamerà per analogia *asse*

*maggiore*, ed i punti estremi  $a$ ,  $A$ , saranno i *vertici* della curva. Il punto di mezzo  $C$  di  $fF$  ne sarà il *centro*, e la metà  $CF = Cf$  la *eccentricità* della curva. Infine la porzione  $Bb$  della perpen-

dicolare elevata sopra  $aA$  nel centro  $C$  si dirà *asse minore*, e le estremità  $B, b$  saranno i rispettivi *vertici*.

269. Dalla definizione della Cassinoide (§ 267) ne consegue che 1° Ciascuno degli assi divide la curva in due parti uguali e simmetriche. 2° Il prodotto dei raggi vettori condotti ad un punto qualunque della curva è uguale al prodotto delle distanze di uno dei fuochi ai vertici dell'asse maggiore, così

$$fM \times FM = fA \times fA = FA \times Fa \text{ (fig. 180).}$$

270. Dal vertice  $B$  dell'asse minore di una Cassinoide qualunque  $ABab$  (fig. 181), conducendo i raggi vettori  $fB, FB$  poiché  $fB = FB$  avremo  $FA \times Fa = FB \times fB = \overline{FB}^2$ , ma dal triangolo rettangolo  $FCB$  abbiamo

$$\overline{FB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CF}^2.$$

Dunque sarà

$$FA \times Fa = \overline{CB}^2 + \overline{CF}^2,$$

e siccome  $FA = CA - CF$ ,

$$Fa = Ca + CF = CA + CF$$

perciò sostituendo e riducendo avremo

$$(1) \quad \overline{CA}^2 - \overline{CB}^2 = 2\overline{CF}^2.$$

*cioè la differenza dei quadrati dei semiassi è uguale al doppio del quadrato della eccentricità.*

271. Da questa proprietà della Cassinoide qui premessa come principio fondamentale è facile argomentare;

1° Supponendo che l'asse minore vada continuamente crescendo, i fuochi si accosteranno continuamente al centro  $C$ , e quando sarà divenuto  $CB = CD = CA$  (fig. 181), dall'espressione (1) avremo  $CF = 0$ ; cioè gli assi divengono uguali, la Cassinoide si cangia in un circolo  $ADad$ , ed è la più grande fra tutte quelle che hanno in comune l'asse maggiore  $Aa$ .



Fig. 181.

2° Supponendo che vada continuamente impiccolendo l'asse minore  $Bb$ , i fuochi si allontaneranno continuamente dal centro  $C$ , e quando  $CB$  sarà divenuto zero la stessa espressione (1) diverrà

$$\overline{CA}^2 = 2\overline{CF}^2 \text{ ossia } CF = \frac{CA}{\sqrt{2}} : \text{cioè quando l'eccentricità sia}$$

uguale al rapporto del semiasse maggiore alla radice numerica di 2 nella Cassinoide non esiste l'asse minore, e la curva è la più piccola fra tutte le Cassinoidi aventi lo stesso asse maggiore  $Aa$ , ed ha la figura di due focchi distinti  $CMa$  e  $CNa$ , di cui i rami sono riuniti e tangenti all'asse maggiore nel centro  $C$ , e per conseguenza tangenti fra loro nel centro medesimo.

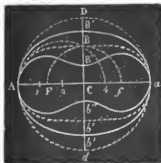


Fig. 182.

272. Supponendo che la eccentricità  $CF$  della Cassinoide  $ABab$  (fig. 182), sia uguale al semiasse minore  $CB$ , la espressione (1) (§ 270) diverrà  $\overline{CA}^2 = \overline{CB}^2 + 2\overline{CB}^2$  onde si avrà  $CB = \frac{CA}{\sqrt{3}}$ .

Or bene; ogni Cassinoide  $AB'ab'$  che abbia il medesimo asse maggiore  $2CA = Aa$ , e il semiasse mi-

nore  $CB'$  più piccolo di  $CA$  e più grande di  $\frac{CA}{\sqrt{3}}$ , cioè sia compresa fra il circolo  $ADad$  di raggio  $CA$ , e la Cassinoide  $ABab$

che abbia per semiasse  $CA$ ,  $CB$ , avrà una figura ovale, e perciò si chiamerà *Cassinoide ovale*. Ogni altra Cassinoide  $AB''ab''$  poi che abbia lo stesso asse maggiore  $Aa$ , ed il semiasse minore

$CB''$  più piccolo di  $\frac{CA}{\sqrt{3}}$  cioè circondata dalla Cassinoide  $ABab$

avrà dei punti di inflessione (§ 8) ugualmente distanti dal centro  $C$ , e comparirà depressa nelle estremità  $B$ ,  $b$  dell'asse mi-

nore; e perciò si chiamerà *Cassinoide depressa*. Una linea retta può tagliare la Cassinoide depressa in quattro punti, mentre non può incontrare la Cassinoide ovale in più di due punti come le sezioni coniche

La Cassinoide adunque che ha l' eccentricità uguale al semiasse minore sarà il limite fra le Cassinoidi ovali e le Cassinoidi depresse aventi comune l' asse maggiore.

273. Per costruire in pratica la Cassinoide è necessario che sieno dati due fra i tre elementi, ai quali è subordinata la curva, cioè gli assi e l' eccentricità. A tal fine sarà utile la soluzione dei seguenti problemi.

**PROBLEMA I.** *Dato l' asse maggiore Aa e le posizioni f, F dei fuochi, trovare l' asse minore della Cassinoide corrispondente (fig. 183).*



Fig. 183.

Sopra Aa si elevi dal punto di mezzo C la perpendicolare Db, e dall' uno dei fuochi F la perpendicolare FR che incontrerà in R la semicirconferenza ADa descritta col raggio CA; dipoi fatto centro in F col raggio FR si descriva un arco di cerchio RBb, il quale tagliando in B e b la perpendicolare Bb determina la lunghezza dell' asse minore Bb

richiesto. Infatti: sarà per costruzione  $FB \times fB = \overline{FB}^2 = \overline{FR}^2$ ; ma dalla semicirconferenza ADa abbiamo  $\overline{FR}^2 = aF \times FA$ ; dunque  $FB \times fB = aF \times FA$  conforme alla definizione della curva

274. **PROBLEMA II.** *Dato l' asse minore Bb e le posizioni F, f dei fuochi trovare l' asse maggiore della Cassinoide corrispondente (fig. 183).* Pei punti F, f si conduca una retta Aa e fatto centro in uno F di essi, col raggio FB si descriva un arco di cerchio BR il quale taglierà in R la perpendicolare FR elevata sopra Aa dallo stesso punto F. Quindi riportando la distanza CR

da C in A e in  $a$ , la lunghezza  $Aa$  così determinata sarà l'asse maggiore richiesto. Infatti avendo  $FB = FR$  il triangolo rettangolo  $FCB$  darà  $\overline{FR}^2 - \overline{CB}^2 = \overline{CF}^2$ , ma essendo  $CR = CA$  dal triangolo rettangolo  $RFC$  abbiamo  $\overline{FR}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CF}^2$ ; dunque sostituendo e riducendo avremo  $\overline{AC}^2 - \overline{CB}^2 = 2\overline{CF}^2$  cioè resta verificata la proprietà della Cassinoide relativa ai quadrati dei semiassi (§ 270).<sup>1</sup>

275. PROBLEMA III. *Dati gli assi  $Aa$ ,  $Bb$  trovare le posizioni dei fuochi  $F, f$  della Cassinoide corrispondente (fig. 184).*



Fig. 184.

Dalla estremità B dell'asse minore si conduca la  $BR$  parallela all'asse maggiore fino che incontri in  $R$  la semicirconfenza  $ADa$  descritta col semiasse maggiore  $CA$ , e dal punto  $R$  si meni  $RP$  perpendicolare all'asse stesso sul quale si prenderà  $Cp$  uguale alla metà del segmento  $CP$ . Sopra  $Pp$  come diametro si descriva la semicirconfenza

$PSp$ , la quale taglierà il semiasse  $CB$  in  $S$ , e finalmente si riporti  $CS$  sull'asse maggiore da  $C$  in  $F$  e in  $f$ , ed i punti così segnati saranno i fuochi richiesti.

Infatti essendo  $PB = CA$ , dal triangolo rettangolo  $P'CB$  avremo  $\overline{CA}^2 - \overline{CB}^2 = \overline{CP}^2$ ; ma per costruzione avendo

$$\overline{CF}^2 = \overline{CS}^2 = CP \times Cp = \frac{\overline{CP}^2}{2}$$

si ottiene  $\overline{CP}^2 = 2\overline{CF}^2$ ; dunque avremo  $\overline{CA}^2 - \overline{CB}^2 = 2\overline{CF}^2$ , che esprime la rammentata proprietà della Cassinoide (§ 270).

<sup>1</sup> L'operazione geometrica che risolve uno dei problemi precedenti, è l'operazione inversa che risolve l'altro. Noi abbiamo adoperate due dimostrazioni diverse, ma ambedue varranno per l'uno e l'altro problema, e lo studioso potrà servirsene indistintamente.

276 METODO DELLE QUARTE PROPORZIONALI. — Dato l'asse maggiore  $Aa$  e le posizioni  $F, f$  dei fuochi, descrivere la Cassinoide per punti (fig. 185).

I problemi precedenti possono ricondursi ai medesimi dati di questo caso quando fossero dati altri elementi. Ciò avvertito, da un vertice  $A$  si conduca una retta che faccia un angolo qualunque  $f' Af$  con l'asse e vi si prenda  $Af'$  uguale ad  $Af$ . Si scelga



Fig. 185.

sulla distanza  $Ff$  dei fuochi un punto a piacere  $p'$  e tirata  $fp'$  si meni dal fuoco  $F$  più prossimo ad  $A$  la  $Fq'$  parallela a  $f'p'$ . Ora facendo centro in  $F$  ed in  $f$  con un raggio uguale ad  $Af'$  si descrivano quattro archi di cerchio ed in vece facendo centro nei punti stessi  $f, F$  ma in ordine inverso con un raggio uguale ad  $Aq'$  si descrivano altri quattro archi che taglino i pri-

mi I quattro punti  $M, m, M', m'$  di intersezione saranno simmetricamente ed ugualmente disposti intorno al centro  $C$  e apparterranno alla Cassinoide. Infatti considerando un punto  $M$  le parallele  $p'f', q'F$  daranno  $AF : Ap' :: Aq' : Af'$  ma per costruzione abbiamo  $Ap' = FM, Aq' = fM, Af' = Af = Fa$ , dunque  $AF : FM :: fM : Fa$  d'onde  $FM \times fM = AF \times Fa$  come è proprietà della curva (§ 269, 2°). Prendendo sulla distanza  $Ff$  altri punti  $p, p'', p'''$ , ec. e ripetendo altrettante volte le operazioni precedenti otterremo per ciascuno quattro nuovi punti; e finalmente per tutti i punti così determinati si farà passare una linea (§§ 62 al 68) che sarà la Cassinoide dimandata.

277. Se la distanza  $AF$  (fig. 185) è piccola, o l'angolo  $f' Af$  si prende ottuso, quanto più i punti  $p, p', p''$ , ec. si scelgono vicini ad  $F$ , le rette  $Fq, Fq', Fq''$ , ec. taglieranno la  $Af'$  più

obliquamente; allora i punti di loro intersezione essendo più incerti le lunghezze delle quarte proporzionali saranno meno esatte, e per conseguenza diverrà inesatta la costruzione della curva. Queste inesattezze si eviteranno colla seguente costruzione che chiameremo:

278. METODO DELLE TERZE PROPORZIONALI. *Dati i fuochi F, f e l'asse maggiore Aa descrivere la Cassinoide per punti (fig. 186).* Sopra Aa come diametro si descriva la semicirconferenza ARa, e da un fuoco F vi si conduca l'ordinata FR. Intanto sappiamo



Fig. 186.

che con FR si determina l'estremità B, b dell'asse minore per cui deve passare la curva (§ 273). Preso un punto P fra il centro C ed il fuoco F si descriva la semicirconferenza qRp, la quale taglierà l'asse maggiore ed il suo prolungamento nei punti p e q, d'onde avremo

$$Fq \times Fp = \overline{FR}^2 = AF \times Fa.$$

Or bene, i segmenti Fp, Fq saranno i raggi coi quali si descriveranno a vicenda dai centri F e f gli archi, le intersezioni dei quali determinano come nel metodo precedente (§ 276) i quattro punti M, m, M', m'. Prendendo altri punti fra F e C ed operando nel modo istesso si otterrà una serie di punti, che darà l'andamento della Cassinoide.

I metodi esposti si prestano convenientemente fin dove si può adoprare la riga ed il compasso, ma nelle grandi costruzioni difficili riescono queste operazioni geometriche: perciò si conseguirà più esattezza cercando le quarte proporzionali e le terze proporzionali col mezzo della regola del tre.

279. Prima di impiegare la Cassinoide nelle arti è d'uopo

di verificare se la sua forma conviene all'oggetto che si vuol destinare. A tale effetto si divide il semiasse CA (fig. 182) in tre parti, e si riporta una di esse da C in  $\frac{1}{3}$ , e dipoi sopra  $A\frac{1}{3}$  come diametro si descrive una semicirconferenza, che taglierà in B la perpendicolare elevata da C sopra Aa, il che darà (§ 272)

$$\overline{CB}^2 = \frac{CA}{3} \times CA = \frac{\overline{CA}^2}{3}, \text{ d'onde } CB = \frac{CA}{\sqrt{3}} = \frac{2}{6,928} \times Aa.$$

Dunque se il semiasse minore dato è più piccolo di  $\frac{2}{7}$  incirca dell'asse maggiore avremo la *Cassinoide depressa*, se più grande la *Cassinoide ovale*.

280. La Cassinoide depressa potrà impiegarsi per ornativa nelle ringhiere, nelle cancellate, nei lavori di intarsio o di mosaico. La Cassinoide ovale può impiegarsi con vantaggio nella costruzione degli archi e delle volte e delle cupole a sesto scemo o rialzato collocando l'asse maggiore orizzontale o verticale. La Cassinoide ovale è più rigonfiata della ellisse che ha i medesimi assi, ossia ha minor curvatura verso i vertici dell'asse minore, e perciò racchiude una maggior superficie di questa. Ciò la rende conveniente agli archi dei ponti che debbono esser tangenti ai piedritti, non eseguibili a tutto sesto, o ellittici, e presentare la massima sezione al passaggio delle acque. Il costruttore però si rammenti che questa ovale è meno gradevole all'occhio dell'ellisse, e non può adoprarsi che per gli archi che hanno una saetta maggiore di  $\frac{1}{7}$  della corda; ed inoltre sia cauto nella costruzione poichè esercita sui piedritti una spinta maggiore di un arco o di una volta ellittica.

281. Nelle indicate costruzioni è necessario al solito di determinare la direzione delle linee d'unione dei cunei, cioè saper condurre le tangenti e le normali alla Cassinoide. Ad un punto qualunque M della Cassinoide si conducano i raggi vettori FM.  $fM$  (fig. 187), e si riporti uno di essi  $fM$  sull'altro da M in  $f'$ , e da  $f'$  si conduca la  $f'R$  parallela al grand'asse: avremo



$$FM : fM :: fM : MR.$$

Ora prendendo sul prolungamento di FM la  $Mr = MR$  si uniscono i punti  $f, r$  e da  $M$  si abbassi sopra  $fr$  la perpendicolare  $MT$  che sarà la tangente nel punto  $M$ : perciò si conduce una tangente  $MT$  ad un punto  $M$  preso sulla

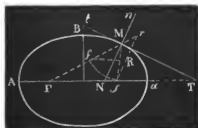


Fig. 187.

*duce una tangente MT ad un punto M preso sulla Cassinoide riportando una terza proporzionale MR presa fra i due raggi vettori sopra il prolungamento di un raggio, ed abbassando da M una perpendicolare sulla retta fr, che*

*unisce il punto r così determinato ed il fuoco f dell'altro raggio. Per condurre la normale si menerà dal punto M la  $nMN$  perpendicolare alla tangente  $MT$  o parallela alla retta  $fr$ .*

282. Non resterebbe per ultimo che a parlare della misura lineare della Cassinoide, della quadratura dell'area da essa racchiusa, e della cubatura del solido di rivoluzione generato intorno agli assi, ma per tali ricerche in pratica gli artisti ricorreranno ai metodi generali che abbiamo esposti.

### Catenaria.

**Proprietà della Catenaria.** — 283. La curva secondo la quale si dispone una catena  $PAQ$  (fig. 489), o una corda perfettamente flessibile ed uniformemente pesante <sup>1</sup> sospesa a due

<sup>1</sup> Per *uniformemente pesante* si deve intendere che le maglie della catena, o le parti della fune di una medesima lunghezza sieno di ugual peso e di materia perfettamente omogenea. La catenaria non è che un caso particolare del *poligono funicolare* in equilibrio, cioè di un poligono composto di un insieme di corle o di regoli animato negli angoli da forze parallele, i lati del quale sono considerati immensamente piccoli, e sottomessi unicamente all'azione della gravità ossia del proprio peso.

punti fissi P, Q di cui la distanza PQ è minore della lunghezza della catena, ed abbandonata al proprio peso, si chiama *Catenaria*.

284. Le proprietà della Catenaria emergono dalle considerazioni a cui ci conducono le leggi dell'equilibrio, ma ciò non ostante non è difficile dalla natura meccanica (§ 283) di questa curva persuadersi intanto che: 1° La Catenaria è una curva piana ed aperta siccome la parabola o una branca d'iperbola. 2° Il punto più basso della curva si chiamerà *vertice*. 3° La verticale condotta dal vertice è l'*asse* e divide la curva in due parti uguali e simmetriche.

285. Dalla definizione della curva (§ 283) ne consegue che se delle palle di diametro uguale, e di un medesimo peso si infilano in una corda sospesa per le sue estremità a due punti fissi, la linea dei loro contatti ossia dei loro centri è una Catenaria. Supponendo adesso che tutto il sistema di queste palle senza scomporsi prenda una posizione inversa PAQ (*fig. 188*), in modo che il punto più basso divenga il più elevato A e i centri



Fig. 188.

tratti delle palle si mantengano sullo stesso piano verticale, e le estreme P, Q, sieno tenute fisse dagli orli di un regolo MN che gli serva di base: se si sopprime il filo in cui sono infilate, le

palle rimarranno in equilibrio perfetto senza cessare di toccarsi

Il confronto della Catenaria con queste due curve non deve far credere di poterle confondere insieme, perchè le proprietà della Catenaria non appartengono ad alcuna altra curva. Soltanto quando la saetta è assai piccola rapporto alla distanza dei punti fissi l'andamento della curva si accosta molto a quello della parabola, ovvero della *Cicloide* che mostreremo in seguito.

nei medesimi punti: imperocchè non segue variazione nella azione della gravità sulle palle, nè cangia l'azione reciproca in virtù della quale esse si premono una contro l'altra; e queste pressioni fanno in tal caso le veci delle trazioni che avevano luogo sugli elementi della corda quando questa era sospesa naturalmente e sosteneva tutte le palle infilate. Il celebre Rondelet ha dimostrato con ripetute esperienze la verità di questo fatto, <sup>1</sup> dal quale risulta che *i corpi del medesimo peso e di ugual forma collocati uno accanto all'altro secondo una Catenaria si sostengono nell'aria per solo effetto dei loro contatti.*

286. Questa proprietà rende la Catenaria applicabile vantaggiosamente alla curvatura delle centine nella costruzione degli archi e delle volte, specialmente quando hanno la corda molto grande, hanno un gran carico da sopportare, e dove la solidità deve esser preferita alla bellezza delle forme. In queste costruzioni l'arco o la volta composta di cunei uguali in dimensioni ed in peso non avrà bisogno di rinfianchi e rimarrà in equilibrio. Lo stesso Rondelet se ne è servito con successo nella costruzione degli archi che sostengono l'intercolonio circolare della cupola di Santa Genovieffa di Parigi, delle lunette praticate nella parte inferiore di essa, e della volta interna a sesto rialzato che sta fra le due cupole in sostegno della lanterna. <sup>2</sup>

287. La catenaria è comunemente impiegata nella costruzione dei *ponti sospesi* quale è naturalmente generata. Questi ponti sono formati da due, e più catene o fasci di filo ferro tese ugualmente e parallelamente fra loro da una riva all'altra del corso d'acqua da attraversare, sulle quali è posto un piano di tavole di legname, o meglio sono ad esse attaccate delle piccole

<sup>1</sup> RONDELET. *Art de bâtir*, livre troisième, première section, chapitre deuxième.

<sup>2</sup> RONDELET. *Art de bâtir*, livre troisième, cinquième section, chapitre troisième.

catene verticali, delle quali ogni coppia sostiene una traversa, e su tutte le traverse è posto il piano delle tavole. Ma in queste costruzioni importa che la meccanica insegni il modo di distribuire il peso del ponte uniformemente sulle catene e di conoscere le tensioni estreme delle medesime onde assicurarsi che i punti fissi che gli servono di attacco sieno sufficientemente resistenti.

**Descrizione e costruzione della Catenaria.** —

288. Con facilità si può costruire meccanicamente la curva conforme alla sua definizione. Si segnino sopra un piano verticale le posizioni P e Q (fig. 189) dei punti di attacco, e si conduca una orizzontale BC che determini l'altezza PC o QB della curva sopra P o Q. Quindi si prenda una corda flessibile ed omogenea, o meglio una catena finissima di metallo composta di anelli mobili uguali in peso e dimensione, e si sospenda in modo che radendo il piano passi pei punti P e Q e resulti tangente alla orizzontale BC.

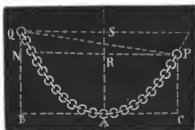


Fig. 189.

Allora se si segna a contatto della catena una serie di punti e si uniscono col voluto grado di continuità, (§§ 62 al 68) otterremo la Catenaria, che rovesciata potrà servire per una centina di un arco, di cui P e

Q sono i piedritti. Se dal punto P si conduce una orizzontale PN fin che incontra in N la curva, la verticale SA abbassata dal suo punto di mezzo R sarà la linea di simmetria, ed il punto A ove incontra l'orizzontale BC sarà il vertice, o il punto più basso della curva.

289. Quando l'operatore non abbia a sua disposizione una catena ben fatta per tracciar la Catenaria con la precisione conveniente potrà valersi del seguente metodo geometrico. *Data la*



Secondariamente si prenda sulla parallela condotta dalla metà  $p'$  di  $p''p$  la  $p'q'$  che sia media proporzionale fra  $pq$  e  $p''q''$  già trovata, e sulla parallela condotta dalla metà  $P'$  di  $P''P$  la  $P'Q'$  che sia media proporzionale fra  $PQ$  e  $P''Q''$  parimente trovata; e dipoi riportando su queste parallele da  $p'$  e  $P'$  in  $m'$  e  $M'$  la semisomma delle  $p'q'$ ,  $P'Q'$ , i punti  $m'$ ,  $M'$  apparterranno pure alla Catenaria. In terzo luogo si cerchino due medie proporzionali fra  $AB$ ,  $p''q''$  e fra  $AB$ ,  $P''Q''$ , e si riportino rispettivamente sulle parallele condotte dai punti di mezzo  $p'''$ ,  $P'''$  dello  $p''B$ ,  $P''B$  da  $p'''$  e  $P'''$  in  $q'''$  e  $Q'''$ , e se sulle medesime parallele si prendano le  $p'''m'''$ ,  $P'''M'''$  uguali alla semisomma delle  $p''q''$ ,  $P''Q''$ , avremo altri due punti  $m'''$ ,  $M'''$  della Catenaria.

Infine proseguendo a trovare delle medie proporzionali fra quelle già trovate, ed operando in modo analogo, otterremo via via dei punti intermedi fra i determinati precedentemente, e facendo passare per tutti una linea (§§ 62 al 68) avremo descritta la Catenaria  $MAM$  richiesta. <sup>1</sup> Le medie proporzionali si

fatte onde non risentire gli errori che si potessero aver commessi, e perchè adoprando i noti processi geometrici le linee di costruzione sarebbero maggiormente inclinate fra loro, i loro punti d'intersezione più incerti, e perciò le lunghezze ottenute meno esatte.

<sup>1</sup> Facendo  $pq = a$  ed  $AB = 1$  siccome  $AR + RB = 2RN + NB = \frac{AB}{NB}$  sarà  $PQ = AR + RB = \frac{4}{a}$ ; perciò dalle costruzioni operate avremo i seguenti valori delle medie proporzionali

$$\begin{aligned} p''q'' &= \sqrt{pq \cdot AB} = a^{\frac{1}{2}} & P''Q'' &= \sqrt{PQ \cdot AB} = \frac{4}{a^{\frac{1}{2}}} \\ p'q' &= \sqrt{p''q'' \cdot pq} = a^{\frac{3}{4}} & P'Q' &= \sqrt{PQ \cdot P''Q''} = \frac{4}{a^{\frac{3}{4}}} \\ p'''q''' &= \sqrt{p''q'' \cdot AB} = a^{\frac{1}{4}} & P'''Q''' &= \sqrt{P''Q'' \cdot AB} = \frac{1}{a^{\frac{1}{4}}} \end{aligned}$$

Se ora pei punti  $q, q', q'', q''', A, Q'', \dots Q$  si fa passare una linea curva, e si prende  $Pp$  per asse delle ascisse e  $BC$  per asse delle ordinate, le

potranno determinare col calcolo o col solito processo geometrico a seconda che lo giudicherà conveniente l'operatore.

**Tangenti e misura della Catenaria.** — 290. La Catenaria potendo essere impiegata nella costruzione degli archi o delle volte (§ 286) si rende necessario il saper condurre le tangenti e la normale alla curva.

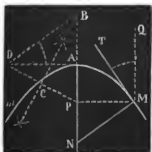


Fig. 191.

Da un punto  $M$  preso sulla Catenaria  $MAm$  condurvi una tangente  $MT$  ed una normale  $MN$  (fig. 191). Dal vertice  $A$  si conduca una perpendicolare all'asse  $AN$ , e vi si prenda  $AD$  uguale alla lunghezza dell'arco  $AM$  rettificato<sup>1</sup> (§§ 72 al 75). Dal punto  $M$  si meni l'ordinata  $MP$ , e si unisca  $P$  con  $D$ . Dal mezzo  $C$  di  $PD$  si elevi una perpendicolare

fino a che incontri il prolungamento dell'asse in  $B$  e si tiri  $BD$ .

medie proporzionali suddette saranno altrettante ordinate di questa curva, le quali comprese le estreme potranno in conseguenza rappresentarsi colla progressione geometrica

$$(1) \quad a^{\frac{1}{4}}, a^{\frac{3}{4}}, a^{\frac{2}{4}}, a^{\frac{1}{4}}, a^0, a^{-\frac{1}{4}}, a^{-\frac{2}{4}}, a^{-\frac{3}{4}}, a^{-\frac{1}{4}}.$$

Dipoi siccome  $Bp$  o  $BP$  è diviso per metà in  $p''$  o  $P''$ , e le loro metà sono divise in mezzo nei punti  $p'$ ,  $p'''$ , o  $P'$ ,  $P'''$ , le ascisse corrispondenti potranno rappresentarsi colla progressione aritmetica

$$(2) \quad \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{4};$$

ma in generale sappiamo che dalla equazione  $ax = y$  si ha  $x = \log. y$ , dunque i termini della progressione (2) sono i logaritmi dei termini della progressione (1). Cioè le ordinate della curva  $qAQ$  hanno per logaritmi le rispettive ascisse. Una tal proprietà ha dato appunto a questa curva il nome di *logaritmica*. La *logaritmica* serve adunque a determinare i punti della catenaria. Non abbiamo parlato di questa curva perchè la pratica non ne ricava alcun utile diretto, e qui non avrebbe il posto conveniente.

<sup>1</sup> Supponendo nota la catena omogenea che ha servito a tracciare la curva, e denotando con  $c$  il quoziente risultante dal dividere la

Finalmente conducendo  $MQ$  parallela all'asse si tirerà per  $M$  la  $MT$ , che faccia con la  $MQ$  l'angolo  $TMQ$  uguale all'angolo  $BDA$ , e la  $MT$  sarà la tangente richiesta. La retta  $MN$  poi elevata perpendicolarmente sopra  $MT$  dal punto di contatto  $M$  sarà la normale. La normale però può ottenersi direttamente cercando la direzione del raggio di curvatura del punto  $M$  (§ 22).

291. Rispetto alla misura della lunghezza di un arco di Catenaria ed alla quadratura dell'area terminata da un arco ricorreremo ai metodi generali. La superficie di rivoluzione poi generata dalla curva che giri intorno all'asse si applica, per le proprietà dimostrate della Catenaria, utilmente alla costruzione delle calotte o cupole che debbono cuoprire un cilindro a base circolare, conforme abbiamo indicato (§ 288); e la misura superficiale e la cubatura si otterrà purè coi metodi generali (§§ 88 al 93), o misurando la superficie ed il volume del cono e dei tronchi di cono in cui piaccia dividerla (§§ 241, 265).

tensione orizzontale della catena pel fattore costante che moltiplicato colla lunghezza dell'arco  $AM$  ne dà il peso, la meccanica insegna che è l'arco  $AM = \sqrt{AP(AP + 2c)}$ , cioè la lunghezza dell'arco  $AM$  è media proporzionale fra l'ascissa  $AP$  e la somma dell'ascissa medesima e del doppio della costante  $c$ . Ognuno vede però che per ottenere in tal modo la rettificazione di un arco di catenaria si richiedono delle cognizioni di meccanica che qui non ammettiamo.



## Lemniscata.

## LEZIONE DECIMAQUINTA.

*Genesis e proprietà della Lemniscata. — Descrizione e costruzione della Lemniscata. — Applicazioni ed esempi.*

**Genesis e proprietà della Lemniscata.** — 292. Abbiansi due curve qualunque NPO, QRS situate sopra un piano in qualsivoglia posizione (fig. 192). Se si immagina di dare ad una linea retta PQ presa maggiore dalla più corta loro distanza un movimento oscillatorio continuo in modo che la estremità P scorra lungo la curva NPO mentre l'altra estremità Q striscia sulla seconda curva QRS, un punto M preso a piacere sulla retta stessa o un punto *m* preso sul suo prolungamento descrive in generale una curva CABDCMC o *cabcdmc* chiusa, irregolare e rassomigliante alla cifra 8.



Fig. 192.

Una curva di simil forma si chiama *Lemniscata*.  
 293. Il punto C (fig. 192), ove la Lemniscata si taglia con se stessa si chiama *nodo* o *punto doppio*. È chiaro che la lemniscata ha due *punti di inflessione* (§ 8), e forma due *foglie* distinte CAB, CDM separate dal nodo. Chiameremo poi *retta generatrice* la retta PQ, ogni punto della quale è capace di descrivere la lemniscata; e *direttrici* le curve NPO QRS che han servito di guida al suo movimento.

294. Or bene la forma di una Lemniscata dipende in generale dalla natura delle direttrici, dalla loro reciproca posizione, dalla lunghezza della retta generatrice, e dalla scelta su di essa del punto generatore, per cui esiste un numero infinito di Lemniscate differenti fra loro. Per rendere applicabile in atto pratico le Lemniscate è d'uopo ridurre le loro forme a condizioni di regolarità. Se le curve direttrici  $QAq$ ,  $DAd$  (fig. 493) sono divise ciascuna in due parti simmetriche da un asse comune  $Aa$ , vi saranno sempre due posizioni  $PQ$ ,  $pq$  della retta generatrice parimente simmetriche intorno all'asse medesimo, ed il punto generatore segnerà due punti  $M$ ,  $m$  ugualmente distanti da esso. Dunque la Lemniscata corrispondente avrà il nodo situato sopra l'asse, e le foglie simmetriche

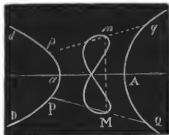


Fig. 493.

intorno ad esso, e perciò la nomineremo *Lemniscata simmetrica*. E quando le direttrici si cangino in due cerchi di raggio qualunque gioverà fin d'ora distinguerla più particolarmente col nome di *Lemniscata circolare-simmetrica*.

295. Inoltre se le direttrici sono uguali e simmetriche rispetto anco ad un *secondo asse*  $Bb$  perpendicolare al primo, nel punto di mezzo  $C$  (fig. 494), vi saranno quattro posizioni  $PQ$ ,  $P'Q'$ ,  $pq$ ,  $p'q'$  della retta generatrice simmetriche due a due intorno agli assi  $Aa$ ,  $Bb$ , e se di più il punto generatore è preso sulla metà della generatrice, avremo quattro punti corrispondenti  $M$ ,  $M'$ ,  $m$ ,  $m'$  della curva ugualmente distanti da ciascun asse: dunque la curva avrà il nodo situato nella intersezione degli assi, e sarà divisa da ciascuno in due parti uguali e simmetriche, e la chiameremo *Lemniscata regolare*. Qui pure se le direttrici divengono due cerchi uguali la distingueremo inoltre col nome di *Lemniscata circolare-regolare*.

296. Le Lemniscate simmetriche (§ 294) e le Lemniscate regolari (§ 295) definite nella loro generalità non ricevono molte applicazioni nelle arti, ma però le loro numerose varietà le rendono proprie ad essere impiegate con successo nei lavori di ornativa sia isolatamente o combinate con altre figure rettilinee o



Fig. 194.

curvilinee, per il che gli artisti dovranno esercitarsi sotto un maestro di disegno geometrico. I fabbri-ferrai se ne serviranno per ornamento delle cancellate e delle ringhiere. Gli intarsiatori potranno trovargli posto nelle figure dei loro mosaici. I

pittori ne trarranno partito nelle decorazioni. Gli orafi se ne varranno per ornare e dar forma agli oggetti di bigiotteria, ec.

297. Le Lemniscate simmetriche e regolari quali le abbiamo supposte generate godono di una rimarchevole proprietà, la quale merita una speciale considerazione. Queste curve essendo chiuse ed intersecandosi hanno i due punti di inflessione, i quali si confonderanno col nodo, e se si suppone condotta pel nodo una tangente ad uno dei rami, questa si confonde sensibilmente col ramo stesso per un tratto più o meno lungo, per cui la Lemniscata in pratica è conosciuta più specialmente col nome di *curva a lunga inflessione*. Di questa proprietà è stata fatta una felicissima applicazione alla Meccanica come or ora vedremo; intanto gioverà premettere alcune idee sulla descrizione e costruzione della curva in questione.

**Descrizione e costruzione della Lemniscata. —**

298. *Descrivere per punti una Lemniscata regolare dato l'asse Bb (fig. 195).* Dal punto di mezzo C di Bb preso per il nodo, si conducano due rette qualunque DCd, D'C'd' le quali facciano un medesimo angolo con l'asse dato, e sopra BC metà di Bb si

descriva una semicirconferenza  $BEC$ , e quindi si prenda l'arco  $NP$  uguale all'arco  $BN$ . Tirata poi la corda  $CP$  si riporti sull'asse da  $C$  in  $O$ , e dal punto  $O$  si elevi una perpendicolare all'asse che incontrerà la semicirconferenza  $BEC$  in  $G$ . Final-



Fig. 195.

mente fatto centro nel nodo  $C$  e col raggio  $CG$  si descriva una circonferenza, ed i punti d'intersezione  $M, m, M', m'$  colle rette  $Dd, D'd'$  simmetricamente disposti due a due rispetto agli assi  $Bb$  ed  $Aa$  apparterranno alla Lemniscata. Prendendo successivamente quante rette fanno bisogno che facciano due a due lo stesso angolo con l'asse  $Bb$ , e ripetendo l'indicata operazione otterremo altrettanti punti della Lemniscata regolare, che uniremo con una linea per

averne la curva continua. Si noti che se la retta  $Dd$  passa pel punto di mezzo  $E$  della semicirconferenza  $BEC$ , i punti che si ottengono si confondono col nodo, perciò le rette  $Dd, D'd'$  devono condursi dal punto  $C$  in modo che taglino il quarto di cerchio  $BE$ .<sup>1</sup> Se invece della semicirconferenza  $BOC$  si impiegasse una ellisse, o una cassinoide o una curva chiusa qualunque, operando nel modo stesso otterremmo altrettante Lemniscate regolari aventi l'asse comune  $Bb$ , ma differenti fra loro.

299. Sul medesimo asse  $Bb$  (*fig. 496*) si può costruire una Lemniscata con un processo molto più semplice. Sull'intero  $Bb$  come diametro si descriva la circonferenza  $BAb$  e si prendano gli archi  $BD, BD'$  uguali, e pel centro  $C$  si condiscano i diametri  $Dd, D'd'$ . Da una delle estremità  $D$  di essi si abbassi sull'asse

<sup>1</sup> La Geometria insegna che la Lemniscata costruita con tal processo è il luogo Geometrico dei piedi di tutte le perpendicolari abbassate dal nodo  $C$  sopra le tangenti di una iperbola equilatera, di cui l'asse maggiore fosse l'asse  $Bb$  della Lemniscata medesima.

la perpendicolare  $DP$ , e si riporti  $DP$  sul rispettivo diametro  $Dd$  da  $D$  in  $M$ , ed in fine si taglino colla circonferenza descritta dal centro  $C$  col raggio  $CM$  i diametri  $Dd, D'd'$ : i punti  $M, m, M', m'$  d'intersezione sono simmetrici due a due intorno agli assi  $Bb, Aa$  ed appartengono ad una Lemniscata.



Fig. 496.

Prendendo altri due diametri ed operando ugualmente otterremo altri quattro punti, e così via via proseguendo avremo una serie di punti appartenenti alla curva, i quali uniti col grado di continuità richiesto dal bisogno. (§§ 62 al 68) daranno una Lemniscata regolare molto differente da quella ottenuta col metodo precedente.

Qui pure se si impiega invece della circonferenza una ellisse o una cassinoide o un'altra curva chiusa qualunque, seguendo le medesime operazioni avremo una Lemniscata regolare differente per ogni curva ausiliaria presa nella costruzione, la quale avrà sempre il medesimo asse  $Bb$ .

300. Vediamo ora come il modo con cui abbiamo in generale supposta generata la Lemniscata suggerisca un processo perfettamente analogo per descriverla e costruirla. Dopo aver tracciate sopra un piano le linee direttrici  $p p' p'' p'''$ ,  $q' q q'' q'''$  <sup>1</sup> (fig. 497), si scelgano sull'una o sull'altra dei punti a piacere  $p, p', p'', p'''$ , ec., e con una apertura di compasso uguale ad una retta  $PQ$ , presa per lunghezza della retta generatrice, facendo centro nei punti medesimi si descrivano tanti archi in modo da tagliare la direttrice opposta sotto un angolo quanto si

<sup>1</sup> Una delle linee direttrici potrebbe esser retta e la curva generata esser parimente una Lemniscata, ma se fossero ambedue rette o composte di linee rette, la curva risultante sarebbe una ellisse, o una curva spezzata composta di archi ellittici (§§ 209, 215).

può maggiore per meglio distinguere i punti rispettivi d'intersezione  $q, q', q'', q'''$ , ec., se quindi si uniscano i punti corrispondenti con le rette  $pq, p'q', p''q'', p'''q'''$ , ec., avremo altrettante posizioni della retta generatrice. Ora sopra ciascuna a partire dai punti  $p, p', p'', p'''$ , ec.



Fig. 197.

si riportino le lunghezze  $pm, p'm', p''m'', p'''m'''$ , ec. uguali alla distanza  $PM$  in cui il punto generatore  $M$  stabilito sulla retta generatrice  $PQ$  si trova dalla estremità  $P$  corrispondente, e pei punti così determinati si faccia passare una linea continua che sarà

la Lemniscata. Il disegnatore il quale per minor confusione di linee volesse risparmiarsi di tracciare le varie posizioni della retta generatrice potrà prendere una striscia di carta o una riga  $PQ$ , e sul suo lembo vi segnerà i tre punti  $P, M, Q$ . Quindi muovendo la striscia o la riga percorrerà col punto  $P$  una direttrice, mentre col punto  $Q$  non si allontanerà dall'altra; in tal modo segnerà successivamente i punti  $m, m', m'', m'''$ , ec. della Lemniscata corrispondenti alle varie posizioni del punto  $M$ .

301. Sopra gli esposti processi potrebbersi in qualche modo costruire degli apparecchi meccanici coi quali descrivere la Lemniscata. Si immagini, per esempio, di aver tracciati sopra un piano dei canali lungo le direttrici: se due perni infissi in un regolo strisciano contemporaneamente con un movimento continuo nei canali, un lapis infilato in un punto del regolo descriverà la Lemniscata corrispondente. Questo procedere però esige di costruire delle canalature per ogni nuova direttrice, il che non è accettabile dall'esercizio pratico delle arti. Quando le direttrici si possono costruire con meccanismi allora è facile concepire un apparecchio senza bisogno di tracciarle. Infatti si sup-

ponga di avere il compasso parabolico (*fig. 403*), (§ 147), ed il compasso ellittico (*fig. 451*) (§ 212), se i perni del regolo suddetto si pongono in luogo dei lapis dei compassi, è chiaro che mettendo in movimento i perni questi descriverebbero rispettivamente una porzione di parabola e di ellisse nello stesso tempo, e quindi il lapis del regolo descriverà la Lemniscata che ha per direttrici quelle curve.

302. Quando si tratti particolarmente di una *Lemniscata circolare* (§§ 294, 295), la facilità di descrivere meccanicamente il circolo riduce agevolmente in atto l'idea precedentemente esposta dello stromento per costruirla. Infatti sopra un piano si piantino due chiodi *C, G* (*fig. 498*), intorno ai quali si facciano girare mobilmente le estremità



Fig. 498.

di due regoli *CP, GQ*, e le altre estremità libere *P, Q* sieno imperniate mobilmente in due punti di un terzo regolo *PQ*. È evidente che se si imprime un movimento al sistema così

disposto, i punti *P* e *Q* descriveranno due archi di cerchio *P'p', Q'q''* intorno ai rispettivi centri *C, G*, e per conseguenza un lapis *M* infilato in un punto del regolo *PQ* descriverà sul piano con movimento continuo una Lemniscata circolare *MM'Mm'mn'n*. Ed è facile comprendere che se facendo centro in *G* col raggio uguale alla somma dei regoli *PQ, GQ* si segnano sull'arco descritto da *P* i punti *p', f'*, e facendo centro in *C* con un raggio uguale alla somma dei regoli *PQ, PC* si segnano sull'altro arco descritto da *Q* i punti *q'', q''* determineremo gli archi *p'P', q''Q''* che rappresenteranno la lunghezza utile delle direttrici ossia degli ar-

chi di oscillazione dei regoli CP, GQ, ed i raggi CP', Cp' e GQ'', Gq'' condotti rispettivamente dai centri C, G alle loro estremità P', p' e Q'', q'' saranno le posizioni estreme dei regoli medesimi. Infine costruendo i tre regoli di lunghezza variabile, come rappresentata la figura, e potendo prendere a piacere la distanza CG dei chiodi e la situazione del lapis lungo il regolo PQ, con questo apparecchio descriveremo qualunque Lemniscata circolare.

**Applicazioni ed esempi.** — 303. L'apparecchio precedentemente esposto, e la proprietà della curva a lunga inflessione, ossia della Lemniscata circolare da esso descritta, di aver cioè una notevole porzione al di qua e al di là del nodo dotata di una curvatura così poco sensibile da potersi considerare senza errore come una linea retta (§ 297) costituiscono un principio fondamentale geometrico-meccanico frequentemente impiegato nelle macchine per le trasformazioni del movimento circolare in rettilineo e viceversa. Un tal principio non sfuggì alle considerazioni dello spirito inventivo del celebre Watt, e lo condusse alla invenzione dei sistemi di articolazione che il primo applicò alle macchine a vapore. È essenziale che le aste degli stantuffi di queste macchine si muovano con *moto parallelo*, cioè che il loro punto di attacco percorra una linea parallela all'asse del corpo di tromba: vediamo come ciò si ottiene.

304. Sia AB la direzione che deve percorrere alternativamente l'asta MB di uno stantuffo (fig. 499), per trasmettere col mezzo del tirante MT un movimento rotatorio all'asse A, e C la posizione del punto di attacco M corrispondente alla metà della corsa. Da un punto qualunque D si abbassi sopra AB una perpendicolare DN, e col raggio DQ a piacere si descriva un arco QR: dipoi dal centro D e dal punto di intersezione Q si conducano pel punto C le rette indefinite Dd, Qq, e si taglino comunque con qd parallela a QD. Ora in un sistema di verghe dp, pP, PD uguali alle rette determinate dp, qQ, QD, ed articolate nei centri fissi d, D e nelle loro estremità libere p, P, se il



punto di attacco  $M$  dell'asta dello stantuffo è situato sopra il regolo  $pP$  come appunto lo è il punto  $C$  sopra la retta  $qQ$ , è chiaro che esso partecipando del moto alternativo dello stantuffo de-

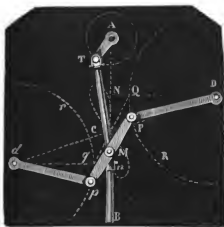


Fig. 199.

scriverebbe una Lemniscata circolare simmetrica intorno alla linea  $dD$  dei centri e che ha il punto  $C$  per nodo (§ 302). Ma se la corsa dello stantuffo è tale da obbligare le verghe  $dp$ ,  $DP$  a descrivere archi di oscillazione al di qua e al di là delle rispettive perpendicolari  $dn$ ,  $DN$  piccoli

quanto più si può, la verga  $pP$  si muoverà presso a poco parallela a se stessa. Dunque il punto di attacco  $M$  dell'asta  $MB$  descriverà al di sopra e al di sotto del punto, o nodo  $C$  una porzione di Lemniscata (§ 297), la quale non si allontanerà sensibilmente dalla direzione  $AB$ ; per cui ne risulterà il *moto parallelo* dello stantuffo.

305. Se ritenendo la precedente costruzione si prende  $DQ > DN$  e si tagliano le rette indefinite  $Qq$ ,  $Dd$  (fig. 200), in due punti qualunque  $q$ ,  $d$  con una retta  $dn$  parallela invece ad  $AB$ , e si dispone in simile modo il sistema delle verghe  $dp$ ,  $pM$ ,  $DP$  uguali rispettivamente alle rette finite  $dq$ ,  $qC$ ,  $Dq$ , il punto di attacco  $M$  dell'asta  $MB$  si troverà invece sul prolungamento della verga  $pP$ , e descriverà pure una Lemniscata, e se i punti  $q$ ,  $Q$  descrivono da una parte e dall'altra dei raggi  $dq$ ,  $DQ$ , archi molto piccoli, lo stesso punto  $M$  percorrerà in prossimità del punto o nodo  $C$  una piccolissima porzione di curva, ed il suo moto si potrà conside-

rare come rettilineo secondo  $AB$ , e perciò si otterrà che lo stantuffo si muova sensibilmente con *moto parallelo*.

306 In ambedue i sistemi articolati, stabiliti sulle costruzioni geometriche ora esposte (§§ 304, 305), i centri fissi di rotazione delle verghe  $dp$ ,  $DP$  (figg. 199, 200), si trovano uno



Fig. 200.

al di qua l'altro al di là della linea di direzione  $AB$ : se invece la retta  $dn$  parallela a  $qD$  o ad  $AB$  taglia le indefinite  $Dd$ ,  $Qq$  o i loro prolungamenti dalla medesima parte del centro fisso  $D$ , ossia fra i punti  $C$  e  $D$ , i centri fissi  $D$ ,  $d$  saranno pure dalla medesima parte, e facilmente si comprende che potranno stabilire dei sistemi articolati analoghi, nei quali il punto di attacco dell'asta  $MB$  descrive una porzione di lem-

niscata che pure non differisce sensibilmente dalla linea retta. Però affinché l'applicazione del principio geometrico meccanico, conduca questi sistemi articolati ad agire in atto pratico nelle migliori condizioni, è d'uopo che i dati di costruzione, cioè la disposizione e le dimensioni delle verghe che gli compongono, sieno scelti convenientemente per ottenere che la porzione di Lemniscata descritta si confonda quanto più si può colla linea retta. Alla Chinematica che intraprenderemo a studiare dopo le presenti Lezioni, spetta l'insegnare le regole speciali per i casi che occorrono nella pratica: qui basti l'aver indicata l'applicazione generale del principio.

Siffatti meccanismi sono impiegati nelle macchine a vapore

fisse, nelle quali il movimento alternativo dello stantuffo è direttamente trasformato in moto rotatorio. Per quelle macchine fisse ove il moto suddetto è cangiato nel movimento circolare alternativo di un bilanciere, il celebre Watt immaginò un meccanismo più complicato, che è purc una applicazione del medesimo principio, ed è generalmente conosciuto col nome di *Parallelogrammo di Watt*.

307. Chiunque abbia veduta una macchina a vapore fissa avrà osservato che l'asta MB (fig. 201), dello stantuffo trasmette il movimento ad un braccio DN del bilanciere per azione mediata, cioè il punto M di attacco dell'una non si trova immediatamente collocato sull'altro, ma vi è unito per l'intermedia-

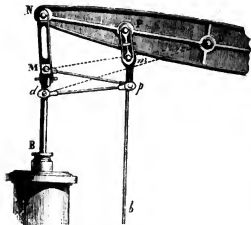


Fig. 201.

ri di un parallelogrammo PpMm composto di verghe rigide, articolato nei vertici, e quindi capace di prendere forme diverse. Un vertice N del parallelogrammo è imperniato nella estremità del braccio DN del bilanciere, ed un suo adiacente P è imperniato sulla linea che passa per N e per l'asse di rotazione D; nel suo opposto poi p è articolata la estremità di una verga rigida pd girevole intorno ad un asse fisso d, e nel quarto vertice libero è nocellato il punto di attacco M dell'asta MB dello stantuffo. Or bene quando venga trasmesso il movimento a siffatto meccanismo poichè i vertici N, p sono obbligati a descrivere degli archi di cerchio

ed un suo adiacente P è imperniato sulla linea che passa per N e per l'asse di rotazione D; nel suo opposto poi p è articolata la estremità di una verga rigida pd girevole intorno ad un asse fisso d, e nel quarto vertice libero è nocellato il punto di attacco M dell'asta MB dello stantuffo. Or bene quando venga trasmesso il movimento a siffatto meccanismo poichè i vertici N, p sono obbligati a descrivere degli archi di cerchio

intorno ai rispettivi centri  $D, d$ , il parallelogrammo cangia continuamente di forma, ed allora il vertice libero, o il punto di attacco  $M$  descrive una porzione di Lemniscata circolare simmetrica intorno alla linea  $Dd$  dei centri  $D, d$  di rotazione, la quale si considererà pure come rettilinea, e perciò il moto si potrà riguardare come parallelo. <sup>1</sup> Infatti sia  $PpMN$  una posizione qualunque del parallelogrammo articolato (*fig. 202*):

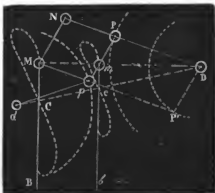


Fig 202.

se si suppone prolungato il lato  $Mp$  finchè incontra in  $P'$  una parallela al lato  $Pp$  condotta dal centro di rotazione  $D$  si avrebbe

$DP' = Pp$  e  $P'p = DP$   
cioè le rette  $Dp'$ ,  $P'p$ , si manterrebbero costanti durante il movimento, ed il punto  $P'$  descriverebbe intorno al centro

$D$  del bilanciere un arco di cerchio di raggio  $DP'$ , mentre il punto  $p$  descrive l'arco di cerchio intorno al centro  $d$  col raggio  $pd$ ; ma allora il lato  $Mp$  del parallelogrammo articolato si muove come se fosse invariabilmente unito alla linea ipotetica  $P'p$ ; dunque il punto di attacco  $M$  situato sul prolungamento della medesima, descriverà una Lemniscata circolare simmetrica intorno alla linea dei centri  $D, d$ , la quale ha per direttrici gli archi percorsi dai punti  $P', p$  (§§ 294, 302, 305).

308. Il parallelogrammo di Watt ha la proprietà, vantaggiosissima nelle macchine a vapore, di poter guidare in linea retta due aste alla volta. Imperocchè la linea retta  $MD$  (*fig. 204*

<sup>1</sup> La Chienematica ossia la Meccanica Geometrica insegna anco qui a determinare e a disporre i vari pezzi del meccanismo perchè maggiore sia l'effetto che sono destinati di produrre.

e 202), condotta pel centro D e pel punto M tagliando il lato Pp del parallelogrammo in un punto m, i triangoli simili DPm, DNM daranno

$$Pm : NM :: DP : DN.$$

dalla quale si rileva che essendo NM, DP, DN costanti, Pm lo sarà pure, cioè il punto m rimarrà ugualmente situato sopra il lato Pp qualunque sia la posizione del parallelogrammo. Ma dai triangoli stessi avendo  $Dm : DM :: DP : DN$  la prima ragione è costante essendolo la seconda, e per conseguenza il punto m deve descrivere rispetto al centro D di similitudine una curva simile alla Lemniscata descritta dal vertice M. Dunque una seconda asta mb che abbia il suo punto di attacco nel punto m si moverà in direzione rettilinea e parallela all'asta principale MB. <sup>1</sup> E questa seconda asta appunto è destinata nelle macchine a vapore a bassa pressione a condurre con movimento parallelo lo stantuffo della tromba a aria.

309. *Legge geometrica di natura.* I quadranti solari, volgarmente detti *meridiane*, quando sono completamente costruiti, offrono l'esempio di una Lemniscata differente da quelle che abbiamo fin qui considerate, ma non difficile a descriversi. pochissimi conoscono lo scopo e l'utilità di questa curva. In generale coloro che regolano il loro orologio ad una meridiana in una data ora, notando dopo qualche giorno alla medesima ora che la macchina ha ritardato o avanzato sul sole, attribuiscono il ritardo o l'avanzamento a difetto di costruzione o a imperizia dell'orologiaio che lo ebbe nelle mani per ripararlo; senza sapere che un orologio fra i migliori e perfettamente regolato

<sup>1</sup> Siccome il punto P descrive un arco di cerchio col centro in D è chiaro che il lato Pp del parallelogrammo (fig. 202), si muove come se fosse articolato unicamente nelle estremità alla verga pd ed al braccio DP, perciò il punto m descriverà una lemniscata circolare simmetrica intorno la linea dei centri Dd, di cui le direttrici sono gli archi percorsi dai punti P, p coi raggi PD, pd e coi centri D, d (§§ 294, 302).

non può trovarsi d'accordo con una meridiana due giorni di seguito. Eccone la ragione.

Se la terra avesse soltanto il movimento di rotazione sul proprio asse da ponente verso levante è chiaro che il sole si troverebbe sul medesimo meridiano dopo un intervallo di tempo sempre uguale e costante, ma essa camminando contemporaneamente da levante verso ponente in una orbita ellittica intorno al sole (§ 476) il raggio vettore della Terra, ossia la distanza dei due corpi celesti, varia successivamente nel corso di un anno; e siccome la forza d'attrazione del sole è più energica quanto minore è quella distanza, perciò il movimento di traslazione della terra è più o meno celere. Inoltre poichè l'asse della terra è inclinato sul piano dell'orbita e si mantiene parallelo a se stesso, la posizione del sole rispetto all'Equatore varia continuamente. Dunque per queste ragioni il sole, al quale per illusione dei nostri sensi attribuiamo il movimento che realmente ha la terra, non torna sullo stesso piano meridiano che dopo un intervallo di tempo che ora è più lungo ed ora è più corto. Questa durata variabile che corre da mezzogiorno a mezzogiorno o da mezzanotte a mezzanotte di uno stesso luogo si chiama *giorno vero*. Per avere una misura di tempo sempre uguale invece del giorno vero si prende per unità il *giorno medio*, la cui durata si ottiene dividendo la durata di tutti i giorni veri dell'anno pel numero dei giorni medesimi. Dunque il tempo vero è quello che viene indicato dalle meridiane, il tempo medio quello segnato da un buono orologio a ruote.

Or bene si supponga che AB sia la linea meridiana di un quadrante solare verticale (*fig.* 203), sulla quale venga segnato da chicchessia il punto C ove cade l'ombra della estremità dello stilo S nel dì 15 aprile incirca, ed allora si rimettano le lancette di un orologio ben regolato al mezzogiorno preciso. Ciò fatto in diverse epoche dell'anno da decorrere al 15 aprile

successivo, e specialmente intorno al 15 maggio, al 15 giugno, al 26 luglio, al 31 agosto, al 3 novembre, al 24 dicembre e al 10 febbraio, mentre l'orologio indica il mezzogiorno si segni per ciascuna epoca il punto ove cade l'ombra dell'estremità S dello stilo. Se per tutti i punti così segnati si fa passare una

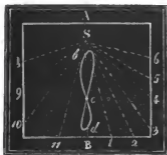


Fig. 203.

linea otterremo una Lemniscata, la quale ha per nodo il punto d'ombra corrispondente al 15 aprile, ed è tagliata dalla meridiana AB nei due punti d'ombra *b*, *d* corrispondenti al 24 dicembre ed al 15 giugno. Questa lemniscata adunque è la linea sulla quale l'ombra dello stilo ritorna dopo la durata di

un giorno medio, e sulla quale bisogna regolare gli orologi a ruote; perciò si chiama *meridiana del tempo medio* come la linea AB è la *meridiana del tempo vero*.<sup>1</sup>

310. Le tangenti, le normali, e la misura della Lemniscata richiedono egliino delle considerazioni da prendersi particolarmente in esame? Le loro applicazioni sono rare nella pratica, e qui, stimando inutile il trattenervisi, rimandiamo gli studiosi a quel poco che accennammo sulla generalità delle Curve.

<sup>1</sup> Se per tutte le linee orarie si procedesse con operazioni analoghe potremmo descrivere altrettante lemniscate, che sarebbero le linee orarie del tempo medio, e così avremmo costruito un quadrante solare capace di indicare il tempo medio completamente con una precisione maggiore di quella che raramente darebbe un orologio ordinario.

## DELLE SPIRALI.

### LEZIONE DECIMASESTA.

*Genesi e applicazioni delle Spirali. — Spirale d' Archimede. — Spirale parabolica. — Spirale iperbolica. — Spirale logaritmica.*

**Genesi e applicazioni delle Spirali.** — 311. Un punto mobile *M* (fig. 204) che sopra un piano gira continuamente intorno ad un punto fisso *C* allontanandosi o avvicinandovisi con qualsivoglia legge genera una linea curva *ABMDE...C*, che in generale si chiama *Spirale*. Da questa generazione si apprende che la *Spirale* è una curva piana e aperta (§ 5), che si estende all' infinito con infinite rivoluzioni, e che perciò può esser tagliata da una linea retta in una infinità di punti differenti.

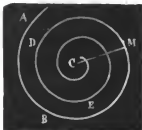


Fig. 204.

312. Il punto fisso *C* è il *centro* della *Spirale*, e la retta *MC* che va da una posizione qualunque *M* del punto generatore al centro *C* è il *raggio vettore*. Ogni porzione di *Spirale* corrispondente ad una *rivoluzione* del *raggio vettore* si chiama *Spira*.

Due *Spirali* generate colla medesima legge ed aventi il centro comune si chiamano *Spirali compagne*. Siccome possono essere variatissime le leggi con cui crescono o scemano successivamente le lunghezze dei raggi vettori, così esiste una grande va-



rietà in questa famiglia delle curve Spirali; ma poichè non tutte sono d'interesse pratico noi ci occuperemo qui solamente di quelle, delle quali si può in qualche modo far uso nelle arti.

313. Le Spirali sono frequentemente impiegate dalla Architettura negli ornamenti delle fabbriche, cioè per dar forma alle volute dei capitelli delle colonne (*fig. 205*), come alle volute



Fig. 205.

delle mensole, dei modiglioni e dei serragli degli archi. Si può impiegare un arco di spirale per formar la centina degli archi zoppi o rampanti che debbono esser tangenti ai piedritti, ovel'artista lo giudicasse capace

a produrre un migliore effetto di un'altra curva.

La Meccanica in qualche ruota elevatrice dell'acqua dispone dei tubi in modo che abbiano una loro estremità aperta posta sulla circonferenza della rota, e che avvolgendosi in spirali compagne (§ 312) si riuniscano al centro in un tubo unico. Se una ruota siffatta si immerge verticalmente nell'acqua, dandole un moto rotatorio in senso contrario all'andamento decrescente dei raggi vettori l'acqua si eleva pei tubi spirali fino al centro, e perciò sgorga pel tubo comune a cui fanno capo. Negli orologi le molle che con la loro forza di elasticità imprime il movimento al meccanismo, come quelle che mantengono le oscillazioni del bilanciere sono appunto disposte in spirale.

Il Magnano si serve della forma spirale per una moltitudine di ornamenti di ferro, ed in specie nella costruzione delle molle delle toppe e dei campanelli. Le molle delle carrozze, i cappelli di paglia, ed i prodotti della natura stessa, come certe conchiglie e le corna di alcuni animali, non presentano altrettanti esempi di spirali piane?

314. La maggior parte degli artisti inclinati a contentare il loro occhio, sia pure esercitato ma raramente sicuro da errore, e a risparmiare le operazioni per conseguire un guadagno sempre maggiore a scapito della perfezione dei loro lavori, costruiscono queste curve a mano ed a vista: però devono persuadersi che giungeranno più sicuramente a dare ad esse un andamento uniforme, e quindi a renderle più gradevoli all'occhio, impiegando dei mezzi geometrici che sottomettano costantemente in tutta la loro estensione la costruzione alla legge con la quale si suppongono generate.

**Spirale d'Archimede.** — 315. La Spirale  $CMM_1M_2M_3\dots$  (fig 206) generata da un punto  $m$  che si muove uniformemente lungo una retta  $CB$  indefinita, mentre questa medesima retta gira uniformemente e ripetutamente intorno ad un centro fisso  $C$ , è chiamata *Spirale di Archimede*, dal nome stesso del Geometra Siracusano che primo ne scoprì le principali proprietà. Essendo non ancora familiari ai nostri uditori le idee di moto uniforme da cui abbiamo supposta generata questa curva, meglio si comprenderà la legge geometrica con le seguenti considerazioni.

316. Si concepisca che il raggio  $CA$  di un circolo qualunque  $AA'A''A'''$  (fig. 206) giri intorno al centro  $C$  nello stesso tempo che un punto  $m$  partito dal centro cammina sopra il raggio; se il rapporto del raggio  $CA$  allo spazio  $Cm$  percorso dal punto è costantemente lo stesso che quello della circonferenza  $AA'A''A'''$  all'arco  $AA'a$  descritto dall'estremità  $A$  del raggio  $CA$ , il punto  $m$  segue appunto l'andamento della spirale di Archimede.



Fig. 206.

Così se il raggio  $CA$  dopo un quarto di giro si trova nella posizione  $CA'$ , il punto  $m$  deve trovarsi in  $M$  ed aver percorso uno spazio  $CM$  uguale al quarto

del raggio  $CA'$ ; dopo un mezzo giro il punto  $m$  si troverà in  $M_1$  sulla metà del raggio  $CA''$ ; dopo tre quarti di giro arriverà in  $M_2$  avendo percorso i tre quarti del raggio  $CA'''$ , e finalmente dopo una intera rivoluzione il punto  $m$  giungerà a confondersi colla estremità  $A$  del raggio nella sua posizione primitiva, e la curva  $CMM_1M_2A$  sarà una spira (§ 312) della spirale di Archimede. Ma facendo fare un secondo giro al raggio  $CA$  il punto generatore  $m$  uscirà dalla circonferenza, e seguitando a percorrere il prolungamento del medesimo, dopo un quarto, la metà, tre quarti di giro e dopo il giro compiuto si troverà nei punti  $M_1, M_2, M_3, M_4$ , avendo percorso al di fuori della circonferenza un quarto, la metà, tre quarti del raggio e l'intero raggio, e la curva  $AM_1M_2M_3M_4$  sarà una seconda spira; proseguendo con simili considerazioni ad una terza ad una quarta, ec. rivoluzione del raggio seguiremo l'andamento di una terza, di una quarta ec. spira della curva in questione. Dunque *i raggi vettori della spirale d' Archimede aumentano sempre della medesima quantità di raggio  $CA$  per ogni ugual porzione della circonferenza  $AA'A''A'''$ , e perciò sono divisi dalle spire in parti uguali precisamente alla lunghezza del raggio medesimo.*

317. Quel circolo di cui il raggio  $CA$  (fig. 206) è percorso dal punto generatore durante una rivoluzione si chiama *circolo regolatore*, il centro  $C$  si distingue più particolarmente col nome di *polo*, ed il raggio  $CA$  lo chiameremo *passo*. Siccome una seconda, una terza ec., posizione del raggio  $CA$  si può riguardare come primitiva, è chiaro che ritenute le precedenti considerazioni tutte le spirali di Archimede corrispondenti alla prima posizione, saranno spirali compagne (§ 312).

318. *Dato il circolo regolatore ovvero il passo  $CA$ , descrivere per punti la Spirale di Archimede (fig. 207).* Si divida la circonferenza descritta col raggio  $CA$  in un numero qualunque di parti uguali, per esempio in 12, e si numerino progressivamente i punti di divisione a partire da un punto qualunque

nel medesimo senso verso il quale si richiede che la Spirale vada allontanandosi dal polo C. Si divida parimente il raggio CA che passa per il punto XII nel medesimo numero di parti



Fig. 207.

uguali, e si numerino progressivamente andando dal polo C al punto A. Infine coi raggi C1, C2, C3, C4.....C11. si descrivano altrettanti archi di cerchio concentrici al circolo regolatore, i quali taglino rispettivamente i raggi C1, C11, C11, C11.....CXI segnati dal numero corrispondente, e poi unendo i punti d'intersezione *a, b, c, d...A* con una linea (§§ 62 al 68) otterremo la prima spira *Cabc...A* della spirale richiesta. Per avere la seconda spira si riporterà una delle divisioni del raggio CA dodici volte di seguito sul suo prolungamento, e si opererà come abbiamo fatto per la prima spira. Volendo una terza spira si aggiungeranno altre dodici parti alle precedenti e si ripeterà la stessa operazione, e continuando in siffatto modo potremo ottenere quel numero di spire che deve avere la richiesta spirale di Archimede.

Quanto maggiore sarà il numero delle parti uguali in cui verrà divisa la circonferenza del circolo regolatore, tanto più esattamente rimarrà determinato l'andamento della curva; ed è chiaro poi che le spire avranno una minor lunghezza ed una maggior curvatura quanto più piccolo sarà il passo o il raggio del circolo regolatore.

319. La proprietà geometrica della Spirale di Archimede, (§ 316) o per meglio dire il modo con cui l'abbiamo supposta generata, (§ 315) ha somministrato un mezzo facile per costruirla meccanicamente. Sia CB (*fig. 208*) una riga girevole intorno ad un pernio fisso C, nel quale sia fissato immobil-

mente un rocchetto, e sia A un corsoio capace di strisciare lungo la riga, e munito di una matita o un lapis; se si attacca il capo *a* di un filo al corsoio A e l'altro capo si fissa sulla circonferenza del rocchetto, e si

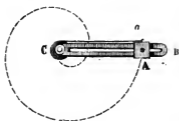


Fig. 208.

fa girare la riga, il filo avvolgendosi sul rocchetto immobile tirerà il corsoio A verso il centro C, ed il lapis segnerà la Spirale d' Archimede (§ 315). Infatti per ogni angolo uguale descritto dalla riga, il filo si avvolge sulla circonferenza del

rocchetto per archi uguali, e quindi il corsoio si avvanza sulla riga quanto le lunghezze loro; e quando la riga avrà compiuto l'intero giro, il corsoio si sarà avanzato sulla primitiva posizione della riga verso il centro *c* di una lunghezza uguale alla circonferenza rettificata del rocchetto, e così dovendo accadere per ogni giro della riga, quella lunghezza sarà il *passo* o il raggio del circolo regolatore, e perciò la curva disegnata sarà la Spirale di Archimede (§ 315). Volendo poi descrivere spirali differenti fra loro, bisognerebbe costruire per ognuna un nuovo rocchetto che avesse la circonferenza rettificata uguale al rispettivo *passo*. Per ovviare a questo inconveniente ecco come potrebbe formarsi a parer mio un vero e proprio compasso atto a descrivere la curva di qualunque passo.

320. Sia AA (*fig. 209*) l'asta orizzontale di un compasso a verga infilata nella gamba BC in modo che possa scorrervi e fissarvisi mediante un rocchetto *r*, che girando nella gamba incastra nella dentatura intagliata nell'asta. La gamba BC termini nella punta C, e l'asta AA termini da ambe le parti nei due sopporti S,S, nei quali giri l'asse VV di una vite continua parallelo ad AA. La vite poi attraversando liberamente la gamba BC incastrasi nella madre vite praticata nell'altra gamba DM del

compasso, la quale munita inferiormente del lapis M sia mantenuta verticale, ed in guida dall' asta AA per mezzo di una intaccatura D fatta nella estremità superiore. Finalmente ad una

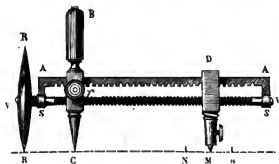


Fig. 209.

estremità dell'asse della vite sia invariabilmente fissata al di fuori dei sopporti una rotella RR di raggio qualunque, ma uguale alla distanza della punta C all'asse. Ora se si fa girare il compasso sopra il piano del disegno intorno alla punta C in modo che la circonferenza della rotella mantenendosi costantemente a contatto col piano faccia girare la vite, la gamba DM, girando intorno alla gamba BC si trasporterà nello stesso tempo lungo l'asta AA, ed in conseguenza il lapis M segnerà una Spirale di Archimede. Ed essendo cogniti per costruzione il raggio VR della rotella, lo spazio Mn percorso dal lapis M durante una rivoluzione di essa, chiamato dai meccanici il passo della vite VV, quando si voglia che la Spirale abbia un passo determinato NM nella disposizione del compasso dovrà verificarsi la proporzione  $Mn : MN :: VR : RC$ , cioè deve darsi alla verga AA per mezzo del rocchetto r una posizione tale da avere la distanza RC quarta proporzionale dopo il passo della vite, il passo dato della spirale, ed il raggio della rotella. <sup>1</sup>

<sup>1</sup> Ecco la dimostrazione: Prendendo RC uguale al raggio VR, per un giro dello strumento intorno a C il lapis si sarà avanzato del passo Mn della vite. In ogni altro caso sia n il numero dei giri della rotella per un giro dello strumento, e sia NM lo spazio corrispondente percorso dal lapis, avremo  $1 : n :: Mn : MN$ , ma sulla circonferenza descritta col rag-

321. Lo strumento testè descritto disegna le spirali in un sol senso, però volendole in senso contrario bisognerà che la vite sia intagliata inversamente. Due spirali descritte in si contrario modo saranno simmetriche, e se hanno il polo

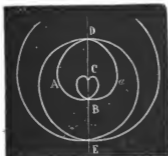


Fig. 210.

comune C (fig. 210) si potrà far passare per esso e pei punti di intersezione B, D, E ec. una linea retta la quale sarà la linea di simmetria.<sup>1</sup> Fra tutte le spirali quella di Archimede è preferita dalla meccanica per la sua proprietà (§ 316) nella trasmissione equabile dei movimenti, e specialmente nella trasformazione del moto circolare continuo in

rettilineo alternativo, ove si impiega una ruota formata a guisa di cuore BADa da due spire simmetriche e girevoli intorno al polo C; ma nelle arti ornative la scelta dipenderà dal buon gusto dell'artista.

322. Può esser utile il saper condurre una tangente alla spirale di Archimede, specialmente all'arte di fabbricare, che è nel caso di impiegare un arco di spirale alla costruzione degli archi zoppi o rampanti (§ 22). Sia M un punto della spirale CAMB... (fig. 211) dal quale si voglia condurre la tangente. Col

gio CR deve svilupparsi la circonferenza della rotella tante volte quanti giri fa sul proprio asse mentre ne fa uno intorno all'asse BC, ed in conseguenza essendo le circonferenze proporzionali ai raggi abbiamo  $1 : a :: VR : RC$ ; dunque avremo  $Mn : MN :: VR : RC$ .

<sup>1</sup> Occorre nell'architettura di impiegare le spirali simmetriche nella descrizione delle volute dei capitelli (fig. 205). In tal caso volendo l'architetto applicarvi la spirale di Archimede, gli bisognerebbero due consimili compassi con le viti intagliate in senso contrario, e facilissimo ci sembra di poter costruire un sol compasso il quale riunisca ambedue le viti e faccia i due uffici; ma un tal problema di costruzione di macchine lo rilasciamo all'ingegno dei giovani costruttori.

raggio vettore  $MC$  condotto da  $M$  si descriva la circonferenza  $MDEF$ , e dal centro o polo  $C$  si elevi sopra  $MC$  la perpendicolare  $CT$ , dipoi si riporti da  $C$  in  $T$  la lunghezza della semicirconferenza rettificata (§§ 74 al 75), e per  $M$  e  $T$  si conduca  $MT$  che sarà la tangente richiesta.

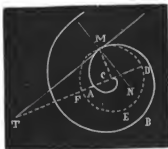


Fig. 211.

Dunque si conduce la tangente  $MT$  ad un punto  $M$  della spirale d'Archimede determinando la ipotenusa di un triangolo rettangolo di cui il raggio vettore è un lato, ed ha per l'altro lato la semicirconferenza rettificata descritta col raggio medesimo.<sup>1</sup> La normale

alla curva nel punto  $M$  si condurrà elevando una perpendicolare  $MN$  sopra la tangente  $MT$  dal punto stesso. Finalmente per condurre la tangente e la normale da un punto situato fuori della curva si ricorrerà ai metodi generali.<sup>2</sup>

323. Per la misura lineare della spirale di Archimede faremo uso dei metodi generali (§§ 69 al 76); ma per misurare la superficie di uno spazio di spirale ci varremo della seguente regola. Essendo noto il raggio  $AC$  del circolo regolatore (fig. 212), la quadratura di un segmento qualunque  $CBMC$  di spirale formato dall'arco  $CBM$ , e dal raggio vettore  $CM$  si rappresenta con

$$(1) \quad \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \overline{CM}^2 \times \frac{CM}{CA},$$

cioè si misura un segmento di spirale moltiplicando il terzo del-

<sup>1</sup> Questa regola è stata dedotta dal metodo di Roberval, ed è applicabile a tutte le curve, imperocchè è fondata sopra un principio generale della rappresentazione grafica della composizione dei movimenti. In una delle note finali il lettore troverà dato un accenno di questo metodo.

<sup>2</sup> Vedi le note poste in fondo al libro sulla costruzione delle tangenti e delle normali.



l'area del circolo di cui CM è il raggio, per il rapporto di questo raggio a quello CA del circolo regolatore.<sup>1</sup>

Se il raggio vettore CM è uguale al raggio CA il loro rapporto è l'unità, e quindi la espressione (1) diviene  $\frac{4}{3} \pi \cdot \overline{CA}^2$ ; cioè si misura l'area dello spazio spirale CBAC racchiuso dalla intera prima spira CBA e dal passo CA prendendo il terzo del circolo regolatore.



Fig. 212.

Se CM è uguale al doppio di CA il loro rapporto sarà 2, e dalla stessa (1) si rileva che la somma dell'area compresa dalla prima spira CBA e di quella compresa dalla linea spirale CBADE, composta della prima e della seconda spira sommate insieme, è  $\frac{8}{3}$  del circolo regolatore.

Togliendo da questa somma l'area racchiusa dalla prima spira CBA rileviamo che la misura della sola area CBADEA racchiusa dalle due successive prime spire si ottiene prendendo i  $\frac{7}{3}$  del circolo regolatore.

Infine se si toglie la superficie CBA racchiusa dalla prima spira da quella CBADEA racchiusa da ambedue le spire si tro-

<sup>1</sup> Nella equazione generale  $S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta$ , che rappresenta l'area curvilinea di una superficie per mezzo delle coordinate polari, si sostituisca il valor di  $\theta$  dato dall'equazione della spirale di Archimedeo  $2\pi \cdot r = \rho^{\theta}$  ove  $r$  è il raggio vettore,  $\theta$  l'angolo da esso descritto e  $\rho$  il passo, ossia il raggio del circolo regolatore: avremo (1)  $S = \pi \int_0^{2\pi} \frac{r^3}{\rho} d\theta$  ed integrando  $S = \frac{4}{3} \frac{\pi r^3}{\rho}$ ; e nel nostro caso essendo  $r = CM$ ,  $\rho = CA$  sarà  $S = CBMC = \frac{4}{3} \pi \overline{CM}^3 \times \frac{CM}{CA}$  come la regola insegna.

verà che l'area CBAEDA intercetta fra la prima e la seconda spirale ed i passi CA, AE, è il doppio del circolo regolatore.

Facendo poi il raggio CM uguale successivamente a 3. CA, 4. CA, 5. CA ec. con ragionamenti ed operazioni analoghe si troveranno le superficie racchiuse dalle intere spirali formate di 3, 4, 5, ec. spire, e per conseguenza anco quelle intercette fra due spire consecutive, le quali si vedrebbe che vanno crescendo nello stesso rapporto del numero delle spire. <sup>1</sup>

**Spirale parabolica.** — 324. Descritta una circonferenza ausiliaria qualunque si divida in qualsivoglia numero di parti,

<sup>1</sup> Per ottenere la superficie della prima spirale, nella formula (4) della nota precedente abbiamo esteso l'integrale da  $r = 0$ , ad  $r = \rho$ ; estendendolo successivamente ad  $r = 2\rho, = 3\rho, = 4\rho$  ec. avremo la superficie delle prime due, delle prime tre, delle prime quattro spire, e così di seguito, imperocchè il raggio vettore percorrendo ad ogni nuovo rivolgimento la superficie già percorsa nel precedente, l'integrale deve contenere la superficie di tutte le prime spire precedenti. Dunque essendo in generale  $n$  il numero delle spire, avremo per le prime  $(n-1)^{\text{ma}}$ ,  $n^{\text{ma}}$ , ed  $(n+1)^{\text{ma}}$  spire le somme seguenti

$$\frac{4}{3} \pi (n-1)^3 \rho^3, \quad \frac{4}{3} \pi n^3 \rho^3, \quad \frac{4}{3} \pi (n+1)^3 \rho^3$$

e quindi le superficie  $S_n, S_{n+1}$  racchiuse dalle spirali terminate dalla  $n^{\text{ma}}$  ed  $(n+1)^{\text{ma}}$  spira si esprimeranno con le differenze

$$S_n = \frac{4}{3} \pi \rho^3 (n^3 - (n-1)^3)$$

$$S_{n+1} = \frac{4}{3} \pi \rho^3 ((n+1)^3 - n^3);$$

e per indicare lo spazio intercetto fra le spire  $n$  ed  $(n+1)$  facendo

$$S_{n+1} - S_n = \sum_n^{n+1} \text{avremo}$$

$$\sum_n^{n+1} = \frac{4}{3} \pi \rho^3 ((n+1)^3 - n^3) - \frac{4}{3} \pi \rho^3 (n^3 - (n-1)^3)$$

e riducendo  $\sum_n^{n+1} = 2n \cdot \pi \rho^3$ .

Dunque le aree intercette fra due spire consecutive crescono nello stesso rapporto del numero delle spire.

per esempio in 12 (fig. 213), e si segni con numero progressivo ciascun punto di divisione. Condotti i rispettivi raggi C1, C2, C3... CA e scelta una retta qualunque di lunghezza costante che



Fig. 213.

si chiamerà *parametro*, si determinino medie proporzionali  $Cm_1, Cm_2, Cm_3, \dots, Cm_n$  fra la retta costante e le lunghezze degli archi  $A1, A2, A3, \dots, A12$ , le quali si riporteranno sulle direzioni dei raggi rispettivi a partire dal centro C. La curva che si faccia passare per i punti  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ , così determinati si

avvolge intorno al polo C e si chiama *spirale parabolica* per una certa analogia di costruzione con la parabola<sup>1</sup> (§§ 112, 114, 138). Seguitando ad operare analogamente per un secondo, un terzo giro ec. aggiungendo alle lunghezze degli archi  $A1, A2, A3, \dots, A12$  quelle di una, di due circonferenze ec. costruiremo una seconda, una terza spira e così di seguito in infinito. In questa spirale quanto più crescono i raggi vettori, tanto più si avvicinano le spire fra loro, senza però giungere a toccarsi giammai; cioè il passo va continuamente diminuendo senza venir mai zero.<sup>2</sup> Una tal proprietà potrà in qualche caso par-

<sup>1</sup> Chiamando  $r$  il raggio vettore della spirale,  $\theta$  l'angolo descritto da esso e  $p$  il parametro o la retta costante, saranno  $r$  e  $\theta$  l'ordinata e la ascissa polari, e per costruzione avremo  $\theta : r :: r : p$ ; ma per la parabola ordinaria abbiamo  $x : y :: y : p$ , dunque le due curve hanno le coordinate che godono della medesima proprietà.

<sup>2</sup> Infatti se si rappresentano con  $R_n$  ed  $R_{n+1}$  i raggi vettori corrispondenti ad  $n$  ed  $(n+1)$  spire avremo per costruzione

$$R_n^2 = (2n\pi + \theta) p \quad R_{n+1}^2 = (2(n+1)\pi + \theta) p$$

$$\text{d'onde } R_{n+1}^2 - R_n^2 = 2\pi \cdot p$$

$$\text{ma abbiamo } R_{n+1}^2 - R_n^2 = (R_{n+1} - R_n)(R_{n+1} + R_n)$$



crescono gli angoli che esso rispettivamente forma colla indefinita CB; quindi:

2° Crescendo il raggio CM la curva si avvicinerà continuamente alla indefinita AS senza toccarla giammai, per cui la AS è detta *asintoto* della spirale.

3° Scemando il raggio CM siccome gli angoli suddetti potranno contenere una volta, due volte, tre volte, quattro angoli retti ec. cioè CM farà un giro, due giri, tre giri ec. perciò la spirale si rivolge intorno al polo C con un numero infinito di spire senza mai giungervi, ed il passo continuamente diminuisce verso il polo medesimo.

La spirale che gode di siffatte proprietà ed in tal modo costruita si chiama *spirale iperbolica* per una certa analogia che essa ha con la iperbola.<sup>1</sup>

327. Ecco come dipendentemente dalla stessa iperbola si può costruire questa spirale. Descritta per semplicità la iperbola B<sub>n</sub>D equilatera (fig. 245), e perciò gli asintoti AS, AR per-

<sup>1</sup> Per un punto qualunque M chiamando  $\theta$  l'arco QR descritto dalla retta costante CA, ed  $r, a$ , il raggio vettore e la costante stessa, i settori simili QCR, PCM daranno CR:CM :: QR:PM, d'onde (1)  $r = \frac{a^2}{\theta}$

equazione polare della spirale iperbolica analoga alla equazione della iperbola tra gli asintoti  $y = \frac{c^2}{x}$ , ove  $c$  è una quantità costante. Dalla (1)

si rileva che per  $n$  giri il raggio corrispondente sarà  $r_n = \frac{a^2}{2n\pi + \theta}$ , per cui un tal valore diminuisce col crescere di  $n$ ; inoltre per  $(n+1)$  giri

rilevando dalla (1) che  $r_{n+1} = \frac{a^2}{2(n+1)\pi + \theta}$  avremo il passo

$$P = r_n - r_{n+1} = \frac{2\pi a^2}{(2(n+1)\pi + \theta)(2n\pi + \theta)}$$

Dunque il passo diminuisce continuamente coll'aumentare ancora il numero delle rivoluzioni del raggio vettore.

pendicolari fra loro, da un punto C qualunque di uno di essi stabilito come polo della spirale si descriva una circonferenza ausiliaria, e si divida in parti uguali, per esempio in 12,

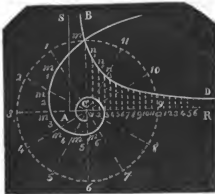


Fig. 215.

e si segnino i punti di divisione con numero progressivo a partire dal raggio Cmparalelo all'asintoto AS, dipoi si divida il raggio C9 che coincide coll'altro asintoto nel medesimo numero di parti uguali, si contrassegnino i punti di divisione in modo simile dal centro verso la circon-

ferenza, e vi si conducano altrettante parallele  $n_1, n_2, n_3$ , ec. ad AS finchè incontrino la iperbola. Infine si riportino le  $n_1, n_2, n_3$ , ec. sopra i raggi contrassegnati dello stesso numero a partire dal polo C, e la curva che si farà passare pei punti  $m_1, m_2, m_3$ , ec. così determinati sarà la spirale iperbolica. Riportando lungo l'asintoto CR le 12 divisioni del raggio al di fuori della circonferenza ausiliaria due, tre ec. volte, ed operando similmente, otterremo la seconda, la terza ec. spira fino all'infinito senza raggiungere il centro.

328. La spirale iperbolica meglio conviene della spirale Archimedeana alle volute dei Capitelli, le quali devono avere la distanza delle spire decrescente, e terminare verso il polo con un piccolo cerchio che dagli architetti è detto *occhio*; imperocchè le spire dopo i primi giri compariscono siccome circonferenze che abbiano per centro il polo medesimo. Così costruendo le volute del Capitello Ionico (fig. 205) secondo una spirale iperbolica che abbia il polo nel centro dell'occhio, gli Architetti otterranno una forma di maggior grazia e regolarità che non conseguirebbero con altre spirali.

329. Per condurre la tangente ad un punto  $m$  della spirale iperbolica (fig. 214) si tiri il raggio vettore  $Cm$ , e dal polo  $C$  si elevi la perpendicolare  $CM$ . Ciò fatto; se sopra il prolungamento di  $mC$  si forma un triangolo rettangolo  $mDT$  di cui i lati  $mD$ ,  $DT$  stieno fra loro come il passo  $nM$  preso sulla perpendicolare  $CM$  sta alla lunghezza della circonferenza descritta col raggio vettore  $Cm$ , la ipotenusa  $mT$  sarà la tangente al punto  $m$ . La normale sarà al solito la perpendicolare  $mN$  condotta alla tangente dal punto di contatto. <sup>1</sup>

**Spirale logaritmica.** — 330. Descritto un circolo di raggio qualunque  $CM$  (fig. 216) si divida la circonferenza in un



Fig. 216.

numero di parti uguali, per esempio in 12, ed a partire da una data posizione  $CM$  del raggio si numerino progressivamente i punti di divisione, e si conducano i raggi  $Cm$ ,  $C2$ ,  $C3$ , ec., i quali formeranno altrettanti angoli al centro uguali fra loro; infine prolungati indefinitamente i raggi  $CM$ ,  $Cm$  si conduca da  $M$  la retta  $MM'$  che faccia un angolo qualunque  $CMM'$  con  $CM$ . Adesso sopra il prolungamento di  $CM$  si prenda  $C1$  uguale a  $CM'$ , e da 1 si tiri  $N1M1$  parallela ad  $MM'$ , si prenda  $C2 = CN1$  e si tiri  $N2M2$  parallela a  $N1M1$ , si prenda  $C3 = CN2$  e si tiri

<sup>1</sup> Vedi le avvertenze delle note 1 e 2 del § 322.

$N'''3$  parallela a  $N''2$ , e così successivamente di seguito fino all'infinito. Se i segmenti  $CN''$ ,  $CN'''$ ,  $CN''''$ , ec. si riportano a partire dal centro  $C$  sopra i raggi prolungati quanto occorra e contrassegnati dal numero corrispondente, la curva che si farà passare pei punti  $M$ ,  $M'$ ,  $M''$ ,  $M'''$ , ec. così determinati si chiama *Spirale logaritmica*.<sup>1</sup> Il circolo di raggio costante  $CM$  anco qui lo chiameremo *circolo regolatore*. E siccome non v'è limite che arresti l'operazione colla quale vengono successivamente determinati i segmenti sulla retta  $CB$ , perciò la spirale logaritmica fa un'infinità di giri allontanandosi sempre dal centro o polo  $C$ .

Viceversa dal punto  $m$  di  $CB$  condotta  $mn'$  parallela ad  $MM'$  sopra  $CB$  si prenda  $C1 = Cn'$  e da 1 si tiri  $n'1$  parallela ad  $mn'$ , si prenda  $C2 = Cn''$  e da 2 si tiri  $n''2$  parallela ad  $n'1$ , si prenda  $C3 = Cn'''$  e da 3 si tiri  $n'''3$  parallela ad  $n''2$ , e così successivamente all'infinito. E se i segmenti  $Cn'$ ,  $Cn''$ ,  $Cn'''$ , ec. si riportano sui raggi  $C11$ ,  $C10$ ,  $C9$  .....  $CM$  in ordine inverso da  $C$  in  $m'$ ,  $m''$ ,  $m'''$ , ec., la spirale passando per questi punti fa in pari modo una infinità di giri avvicinandosi invece al centro  $C$  senza però giungervi giammai.

334. Le rette  $CB$ ,  $CD$  (*fig. 216*) essendo tagliate proporzionalmente da tutte le parallele ad  $MM'$ , è facile argomentare che i segmenti ossia i raggi vettori sono proporzionali fra loro, e quindi il passo della spirale logaritmica anderà proporzionalmente crescendo e viceversa.

<sup>1</sup> Dalle parallele che tagliano le rette  $CB$ ,  $CD$  (*fig. 216*) si rileva che i segmenti  $CN'$ ,  $CN''$ ,  $CN'''$ , ec. sono proporzionali fra loro; perciò due raggi vettori che facciano tra loro un angolo dato stanno sempre nello stesso rapporto, o in altri termini mentre l'angolo che il raggio vettore fa con un raggio fisso  $CM$  cresce in progressione aritmetica, la lunghezza del raggio vettore cresce in progressione geometrica. La corrispondenza fra i termini di queste progressioni costituisce la teoria dei logaritmi, ed ecco la ragione per cui i geometri hanno dato a questa curva il nome di *spirale logaritmica*.



Inoltre tirando le corde  $MM'$ ,  $M'M''$ ,  $M''M'''$ , ec., avremo i triangoli  $CM'M$ ,  $CM''M'$ ,  $CM'''M''$ , ec. uguali rispettivamente ai triangoli  $CM'M$ ,  $CN''1$ ,  $CN'''2$ , ec. perchè hanno per le costruzioni eseguite (§ 330) un angolo uguale compreso fra lati uguali; ma essendo  $M'M$ ,  $N''1$ ,  $N'''2$ , ec. parallele fra loro, i secondi sono simili fra loro, dunque anco i primi saranno simili, e perciò gli angoli  $CMM'$ ,  $CM' M''$ ,  $CM'' M'''$ , ec. saranno tutti uguali fra loro. Ora se si suppone che gli angoli al centro formati dai raggi vettori vadano infinitamente impiccolendo, le corde tenderanno a divenire le tangenti alle estremità dei raggi; dunque *nella spirale logaritmica l'angolo che un raggio vettore fa colla rispettiva tangente è da per tutto lo stesso.*

332. La spirale logaritmica per la facilità di costruirla (§ 330) e per le proprietà geometriche ora dedotte (§ 331) può utilmente applicarsi alle volute dei capitelli (fg. 205) al pari della spirale iperbolica (§ 328) e forse con maggior vantaggio; e si impiega dalla meccanica per dar la forma ai contorni di due ruote che debbano trasmettersi il movimento rotatorio con ragione variabile di velocità.

**DELLE CURVE GENERATE DALLA ROTAZIONE  
DI UNA CURVA SOPRA UN'ALTRA.**

LEZIONE DECIMASETTIMA.

*Genesi e definizioni generali. — Proprietà e costruzione geometrica della Evolvente. — Costruzione meccanica, tangenti e normali della Evolvente. — Applicazioni della Evolvente. — Generazione, proprietà e costruzione della Cicloide. — Normali e tangenti della Cicloide.*

**Genesi e definizioni generali.**— 333. Se si suppone che una curva piana  $AMB$  qualunque (*fig. 217*) cambi continuamente di posizione rispetto ad una seconda curva  $CMD$  fissa sopra un piano in modo che tutti i punti della prima vengano successivamente in contatto con la seconda; in una parola se la curva  $AMB$  gira e si sviluppa sopra l'altra  $CMD$  senza strisciamento di sorta, il primitivo punto di contatto  $M$  della prima genera il ramo  $Mm$  o  $Mm'$  di una terza curva, la quale comprende una famiglia di curve estesa all'infinito. Per semplicità di linguaggio la chiameremo *curva di sviluppo*.<sup>1</sup>



Fig. 217.

<sup>1</sup> Se il punto descrivente  $M$  fosse situato al di fuori o al di dentro della curva mobile  $AMB$ , si otterrebbe una curva della medesima indole, e la sua generazione avrebbe una maggior generalità. Ma è inutile lo impegnarci più estesamente in considerazioni che non abbiano un utile diretto alle arti per le quali basta l'ordine che abbiamo adottato.

334. Distingueremo poi la curva mobile  $AMB$  col nome di *generatrice*, e con quello di *deferente* la curva fissa  $CMD$ . Il punto primitivo di contatto  $M$  che separa i due rami  $Mm$ ,  $Mm'$  della curva di sviluppo ne è l'*origine*, ed è ciò che si chiama *punto di regresso* (nota 1 del § 8).

Poichè un arco piccolissimo della curva di sviluppo preso sopra ambedue i rami a partire dal punto di contatto  $M$  si può riguardare come perpendicolare alla tangente  $Tm$  comune alle curve  $CMD$ ,  $AMB$ , la rispettiva normale  $nMN$  è tangente comune ai due rami  $Mm$ ,  $Mm'$ , e perciò i rami di una curva di sviluppo sono tangenti fra loro nel punto di regresso.

Se la genitrice è una curva rientrante  $PmB$  (fig. 218) essa

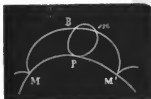


Fig. 218.

potrà svilupparsi ripetutamente sopra la deferente  $MPM'$ , ed il primitivo punto di contatto  $M$  tornerà a toccarla altrettante volte segnando archi uguali alla genitrice  $PmB$  sviluppata; ogni arco  $MM'$  della deferente interdetto fra due punti consecutivi di

regresso si chiama la *base* della curva di sviluppo  $MmM'$ .

335. Ora cerchiamo di ridurre queste curve definite in un concetto generale (§ 333), a quelle specialmente applicabili ai casi particolari che occorrono nella pratica delle arti. A tale effetto distingueremo le curve di sviluppo in tre classi principali.

1° Se la curva genitrice si cangia in una linea retta la curva di sviluppo si dice *Evolvente*, e la deferente prende il nome di *Evoluta*.

2° Se invece si cangia la deferente in una linea retta la curva di sviluppo è del genere chiamato *cicloidale*, e se inoltre la genitrice diviene un circolo essa si distingue specialmente col nome di *Cicloide*.

3° Quando la genitrice e la deferente sono ambedue curve rientranti, ed in special modo due circoli, la curva di sviluppo

si chiama *Epicicloide* o *Ipocicloide* secondo che l'uno si sviluppa sulla convessità o sulla concavità dell'altro. Esaminiamo brevemente le *Evolventi*, le *Cicloid*i, e le *Ipocicloid*i, e vediamo quanto sono importanti per le arti, e quanta parte essenziale hanno specialmente nella costruzione delle macchine.

### Evolvente.

**Costruzione e proprietà delle Evolventi.**— 336. Se si fa girare una riga MR mantenuta continuamente in contatto con una curva ANB (fig. 219), senza strisciarvela, un lapis posto in un

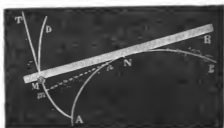


Fig. 219.

punto M descriverà per le cose esposte (§§ 333, 335, 1°) la evolvente ordinaria, di cui la curva ANB è la evoluta. Il punto A, ove il lapis si trova sulla evoluta al principio del mo-

vimento, si dice più comunemente l'*origine* della evolvente. È evidente che si descriverà la medesima evolvente se invece della riga si avvolge sulla evoluta un filo inestendibile fermanone un capo per esempio al punto fisso B e l'altro al lapis posto in A, e poi si svolge il filo mantenendolo sempre teso. Però se il lapis M si pone in un punto differente della riga nella prima costruzione, e si prende nella seconda il filo più lungo o più corto, la evolvente che verrà descritta sarà differente dalla prima secondo che varia successivamente la curvatura della evoluta.

337. In questo procedere mentre il punto descrivente M percorre un arco infinitamente piccolo  $Mm$  delle evolvente, la lunghezza della porzione libera MN della riga o del filo varierà

di una quantità trascurabile, e perciò l'arco  $Mm$  si può considerare come un arco di circolo, che ha per raggio la porzione libera  $MN$ , e per centro il punto di contatto  $N$  della riga o della corda; cioè la linea  $MN$  tangente alla evoluta  $AMB$  ed il punto di contatto  $N$  saranno il raggio ed il centro di curvatura dell'archetto  $Mm$  della evolvente  $AMD$  (§§ 20, 24). Ma se l'archetto  $Mm$  si confonde con un arco di circolo, il raggio di curvatura  $MN$  è perpendicolare alla tangente  $MT$ , ossia è la normale alla evolvente nel punto  $M$ . Dunque 1° *la tangente di un'evoluta è la normale della rispettiva evolvente.*

Inoltre poichè la porzione libera  $MN$  della riga o del filo si è svolta dall'arco  $AM$  della evoluta; 2° *la porzione della tangente condotta alla evoluta da un punto della evolvente e intercetta fra le due curve è uguale all'arco sviluppato della evoluta compreso fra l'origine ed il punto di contatto.*

Infine la linea  $MN$  rappresentando un raggio di curvatura della curva  $AMC$ ; 3° *la evoluta è il luogo geometrico dei centri di curvatura della evolvente (§ 65).*

338. Le considerazioni precedentemente esposte sono tuttavia troppo generali perchè la comune intelligenza degli artisti sia in grado di farne l'applicazione, ma ci servono per scendere ai casi particolari contemplati specialmente dalla ordinaria pratica. Se si suppone che la evoluta divenga un circolo  $ANB$  (fig. 220) la evolvente  $AMD$  si dice allora *evolvente di circolo*, ed è appunto quella comunemente in uso, e semplicemente conosciuta col nome di evolvente o sviluppante, su di che scenderemo a stabilire che

1° Poichè la tangente  $MN$  del circolo  $ANB$  è perpendicolare al raggio  $CN$  condotto al punto di contatto  $N$ , per le proprietà esposte (§ 337 1°) è chiaro che *la tangente della evolvente di circolo è parallela al raggio del circolo deferente, ossia della evoluta, condotto al punto di contatto della normale*

2° Per le medesime proprietà (§ 337, 2°) la lunghezza delle

tangenti  $MN$ ,  $M'N'$ ,  $M''N''$  ec. condotte al circolo  $ANB$  dai punti  $M$ ,  $M'$ ,  $M''$ , ec. della evolvente saranno uguali rispettivamente agli archi circolari  $AN$ ,  $AN'$ ,  $AN''$  ec. estesi dall'origine  $A$  ai punti di contatto  $N$ ,  $N'$ ,  $N''$ , ec.; ma sappiamo che gli archi di cerchio  $AN$ ,  $AN'$ ,  $AN''$ , ec. sono rispettivamente proporzionali agli angoli al centro  $ACN$ ,  $ACN'$ ,  $ACN''$ , ec. Dunque *le lunghezze delle tangenti condotte dai punti della evolvente di circolo alla evoluta sono proporzionali agli angoli formati dal raggio che passa per l'origine, e dai raggi che passano pei punti di contatto.*



Fig. 220.

339. *Costruire per punti la evolvente di un circolo dato (fig. 221).* Si divida la circonferenza della evoluta in un numero qualunque di archi uguali, per esempio in 12, e si numerino i punti di divisione progressivamente a partire da uno  $A$  considerato come l'origine della evolvente. Condotti i raggi  $CA$ ,  $C1$ ,  $C2$ ,  $C3$ , ec. si elevino all'estremità di ciascuno le perpendicolari  $M_11$ ,  $M_22$ ,  $M_33$ ,  $M_44$ , ....  $AM_{12}$ , che saranno tangenti alla circonferenza nei punti  $1$ ,  $2$ ,  $3$ , ....  $A$ . Dipoi presa una retta uguale in lunghezza ad un singolo arco della voluta si riporti sopra ciascuna tangente dai punti di contatto  $1$ ,  $2$ ,  $3$ ,  $4$ , ....  $A$  in  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$ , ....  $M_{12}$ , tante volte quante ne indica il numero rispettivo. La curva che si farà passare pei punti  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$ , ....  $M_{12}$ , così determinati sarà per le cose esposte la evolvente richiesta (§ 337, 2°).

340. Dopo avere operato successivamente per tutti i contatti e compiuto l'intero giro giungeremo ad avere la lunghezza della ultima tangente  $AM_{12}$  corrispondente all'origine  $A$  uguale alla intera circonferenza sviluppata della evoluta; ma non essendo impedito di tornare ripetutamente a percorrere la circon-

ferenza, con operazioni analoghe possiamo aggiungere alle lunghezze delle tangenti  $M_1, 1, M_2, 2, M_3, 3, \dots, M_{12}, 12$ . A una volta, due volte, tre volte ec. in infinito la lunghezza della circonferenza sviluppata, ed aver così un secondo, un terzo, un quarto giro ec. della evolvente; dunque la evolvente del circolo è una spirale, che partendo da un punto della circonferenza gira infinitamente intorno al centro, e che allontanandosene continuamente conserva fra le spire una distanza costante uguale alla circonferenza sviluppata. <sup>1</sup>

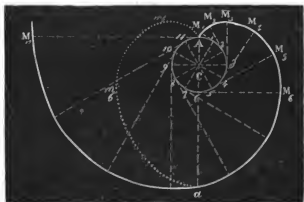


Fig. 221.

**Costruzione meccanica.— Tangenti e normali della Evolvente.** — 344. Facile è immaginare il modo di costruire meccanicamente la evolvente in questione. Si fissi sopra il piano del disegno una rotella ANB (*fig. 222*), e nel suo centro C si fac-

<sup>1</sup> Se per evoluta invece di un circolo si prendesse una ellisse, una cassinoide ovale o una cicloide, ed in generale una curva rientraute qualunque che non abbia punti di inflessione, e si procedesse analogamente sulle tangenti condotte ai punti di divisione, si otterrebbe pure una spirale, che avrebbe la distanza delle spire uguale alla lunghezza del perimetro della evoluta. Queste spirali per distinguerle da ogni altra si potrebbero chiamare *circolari, ellittiche, cassinoidiche, cicloidiche* ec. ed in generale col nome della curva cho ne è la rispettiva evoluta.

cia girare un regolo CR lungo il quale possa strisciare un corsoio o manicotto D capace di portare il lapis M. Se sulla circonferenza della rotella si avvolge più volte un filo, di cui un capo sia fissato su di essa e l'altro legato al lapis M, facendo girare il regolo CR pel medesimo senso nel quale è stato avvolto il filo sulla rotella, il lapis M segnerà la evolvente del circolo rappresentato dalla rotella.<sup>1</sup> Infatti la porzione di filo MN sarà sempre tangente alla circonferenza ANB, e scemerà proporzionalmente all'angolo descritto dal regolo CR, ossia dal raggio CN del circolo perpendicolare al filo MN (§ 338, 2°).

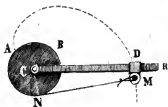


Fig. 222.

La disposizione di questo semplicissimo apparecchio può suggerire la costruzione di un vero compasso per la evolvente, ma è d'uopo di non confonderlo con l'apparecchio già esposto per de-

scrivere la Spirale d' Archimede (§ 319, *fig.* 208). In quello il filo si trovava parallelo al raggio sul quale doveva scorrere il lapis, in questo il lapis deve trovarsi sulla direzione del filo o della tangente alla circonferenza della evoluta, qualunque sia l'inclinazione del regolo sul filo. Ed è chiaro che per tal differenza si ottenne nella prima curva costante il passo (§ 346), e si ottiene nella seconda costante la distanza delle spirce (§ 340).

342. Ora è da osservarsi che il circolo avendo la stessa curvatura in tutti i punti della sua circonferenza (§ 46), il che non è per ogni altra curva, avrà una unica evolvente (§ 336), e perciò in qualunque punto della circonferenza della evoluta

<sup>1</sup> Anco qui se diamo alla rotella la forma di una curva rientrante come una ellisse o una cassinoide, il lapis descriverà sempre una spirale che ha quella curva per evoluta (nota 4 del § 340).



si collochi l'origine  $A$  della evolvente (fig. 221, 222), si otterrà sempre la medesima curva.

Inoltre se nella costruzione geometrica (fig. 221), numeriamo i contatti in ordine inverso, e nella meccanica (fig. 222), avvolgiamo il filo sulla rotella in senso contrario, avremo la medesima curva rovesciata  $Am_1m_2a$ , o in altri termini avremo i due rami della evolvente completa del circolo, di cui l'origine  $A$  è il punto di regresso (§ 334). Ed è chiaro che i due rami saranno uguali e simmetrici intorno al raggio  $CA$  del circolo condotto per l'origine  $A$ , e nei loro avvolgimenti intorno al centro si taglieranno sul prolungamento dello stesso raggio, formando colle metà delle prime spire una figura  $AM_1am_2A$  in forma di cuore.

343. Condurre una tangente ed una normale alla evolvente  $AMD$  del circolo  $ANB$  in un punto dato  $M$  (fig. 223). Si unisca il punto dato  $M$  col centro  $C$  del circolo, e sopra  $MC$  come diametro si descriva la semicirconfenza  $MNC$  la quale taglierà la circonferenza  $ANB$  in  $N$ . Se si tira  $MN$  sappiamo dalla geometria elementare che essa è tangente al circolo in  $N$ ; ma la tangente alla evoluta è normale alla evolvente (§ 337, 1°); dunque  $MN$  è la normale nel punto

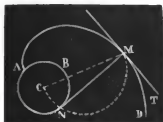


Fig. 223.

$M$ , e quindi la perpendicolare

$MT$  condotta su di essa da  $M$  sarà la tangente alla evolvente. <sup>1</sup>

**Applicazioni.** — 344. Ora indichiamo le principali applicazioni di cui è suscettibile la evolvente del circolo come la

<sup>1</sup> Si potrebbe condurre la tangente ad una evolvente qualunque determinando prima la tangente alla evoluta; ma quando la evoluta sia una curva che non ha semplici regole speciali per condurla da un punto esterno, è più spedito l'applicare subito alla evolvente qualche metodo generale.

più utile fra tutte le evolventi ordinarie. L'architetto può in qualche caso far uso della evolvente di circolo per la curva delle centine nella costruzione degli archi e delle volte. Poichè le tangenti alla evoluta condotte alle estremità di due raggi che fanno angolo retto sono perpendicolari fra loro, un quarto di spira della evolvente servirà per la metà della centina, ed un quarto della spira simmetrica per l'altra metà. Così avremo una curva da sostituirsi alla Ellisse ed alla Cassinoide ovale negli archi a sesto scemo o rialzato, secondo che le curve si faranno tangenti ai piedritti dalla parte che hanno maggiore o minor curvatura. Per esempio ponendo due sagome di legno CDE, C'I'E (fig. 224), composte di un quarto di cerchio ed uguali fra loro, al di sotto della corda Aa in modo che siano a contatto di essa e della perpendicolare BO elevata sul punto di

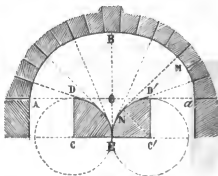


Fig. 224.

mezzo O, per mezzo di un filo che si svolga dalla convessità dell'una e si avvolga sulla convessità dell'altra, potremo descrivere con facilità la curva completa ABA a sesto scemo, di cui il vertice B sarà sulla tangente

comune alle due evolute, e la parte MN sviluppata del filo sempre normale alla evolvente darà la direzione delle committiture dei cunei: per un arco a sesto rialzato porremo invece le sagome circolari al di sopra della corda, ed impiegheremo due fili: nel resto si opererà in modo analogo, come apparisce dalla semplice ispezione della (fig. 225) contrassegnata delle medesime lettere. Con la metà di una spira poi si potranno costruire gli archi rampanti tangenti ai piedritti, i quali è chiaro avranno

l'altezza di una imposta sull'altra uguale al diametro dell'evoluta.

345. La evolvente di circolo è della più grande importanza nella costruzione delle Macchine. Un albero girante munito di

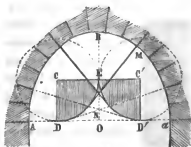


Fig. 235.

un ala formata dalla evolvente della circonferenza dell'albero e che deve agire su di uno sprone orizzontale di un pestello o di un maglio verticale a misura che rende verticali le normali, le sue estremità diverranno i contatti dello

sprone, e perciò verrà a sollevare uniformemente il pestello col minore attrito possibile. Ciò è praticato nelle polveriere e nelle cartiere. Per comunicare il movimento uniforme e senza perdita di forza ad un'asta dentata o guarnita di fusi cilindrici per mezzo di una ruota, si dà ai denti della ruota la forma di evolvente del circolo avente il centro stesso della ruota, ed un raggio un poco più grande. La evolvente di cerchio si applica pure alla forma dei denti di due ruote che debbono per incastro trasmettersi il movimento equabilmente, e delle quali i cerchi di ciascuna debbono prendersi per evolte della curva dei denti rispettivi. I costruttori di macchine, fra i quali pochi conoscono la utilità di dare ai denti delle ruote una forma che corrisponda a condizioni di movimento, ricorreranno per queste applicazioni ai trattati speciali di Cinematica e di Disegno industriale.

### Cicloide.

**Generazione, proprietà e costruzione della cicloide.** — 346. Se si suppone che un circolo  $O$  rotoli sopra una linea retta indefinita senza strisciamento, il primitivo punto di contatto  $A$  (fig. 226) dopo una rivoluzione tornerà a toccarla in

un secondo punto  $a$  generando la curva continua chiamata *Cicloide* <sup>1</sup> (§ 335, 2°). Per esempio chiunque collochi un pennello sul cerchio di una rota di una vettura che si muova accosto ad un muro verticale osserverà che il pennello segna sulla superficie del muro una cicloide. <sup>2</sup> La retta intercetta fra i due contatti  $A$ ,  $a$

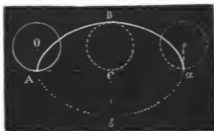


Fig. 226.

estremo  $B$  poi si dice il *vertice*.

347. È chiaro che la base della cicloide uguaglia la lun-

<sup>1</sup> Siccome le rivoluzioni potrebbero ripetersi all'infinito, il primitivo punto di contatto tornerebbe a toccar successivamente la retta una infinità di volte, generando una curva composta di una serie infinita di archi uguali avente altrettanti punti di regresso, e che si chiama appunto cicloide. Ma in pratica si considera sempre un solo arco al quale si dà il nome della curva intera.

<sup>2</sup> Questa medesima osservazione fu fatta per la prima volta dal P. Mersenne nel 1615 considerando un chiodo d'una delle rote di una vettura che transitava una via di Nevers. Dal movimento progressivo e circolare della rota argomentò il movimento risultante, pel quale il chiodo doveva descrivere una curva particolare che si chiamò cicloide. Se il punto generatore  $A$  fosse situato internamente sul raggio  $OA$  (fig. 226) o fosse situato esternamente sul suo prolungamento genererebbe tuttavia una cicloide, la quale non sarebbe la stessa di quella prodotta dal rotolamento del cerchio (nota 1 del § 333). Nel primo caso la base è più grande della lunghezza della circonferenza del circolo genitore, e perciò la curva si dice *cicloide allungata*: nel secondo caso è più piccola e la curva si dice *cicloide accorciata*. La cicloide allungata e la cicloide accorciata si ottengono pure dal rotolamento del circolo, il quale si strisci contemporaneamente nel medesimo senso o nel senso contrario del suo movimento. Di questi tre generi di cicloidi però il primo gode soltanto di importanti proprietà che meritino di essere specialmente studiate.

ghezza della circonferenza sviluppata del circolo genitore, e l'altezza uguaglia il diametro del circolo medesimo; d'onde il rapporto della base all'altezza di una cicloide è costante, ed uguaglia il rapporto della circonferenza al diametro. Per conseguenza, come i circoli, tutte le cicloidi di base diversa sono simili. Supponendo che venga rovesciata la cicloide  $ABa$  intorno la base  $Aa$  nella posizione  $Aba$ , si otterrà una curva  $ABab$  regolare rientrante divisa da ciascuno degli assi  $Aa$ ,  $Bb$  perpendicolari fra loro in due parti uguali e simmetriche. Ciò meglio vedremo in seguito al § 351.

348. *Costruire la cicloide per punti data la base  $Aa$  (fig. 227).* Si divida la base  $Aa$  in 22 parti uguali, e si numerino progressivamente dalle estremità verso il centro  $C$ , ed elevando da  $C$



Fig. 227.

una perpendicolare sopra  $Aa$  si prenda  $CB$  uguale a 7 di quelle parti. Siccome  $\frac{22}{7}$  è il rapporto approssimativo della circonferenza al diametro,  $CB$  sarà l'asse, e il punto  $B$  il vertice della cicloide (§ 347). Potremo adunque riportare le ventidue parti della base  $Aa$  sulla circonferenza descritta dal mezzo  $O$  di  $CB$  col raggio  $OC$ , che è quella del circolo genitore. Numerati progressivamente i punti di divisione da una parte e dall'altra dell'asse  $CB$  si conducano da tutti questi punti altrettante rette parallele alla base  $Aa$ . Ciò fatto si prendano i segmenti della base  $A1$ ,  $A2$ ,  $A3$ ,  $A4$ , ...,  $A10$ , e si riportino rispettivamente

sulle parallele contrassegnate del medesimo numero da un lato della circonferenza da  $1', 2', 3', 4' \dots 10'$  in  $M_1, M_2, M_3, M_4 \dots M_{10}$ , dall'altro da  $1', 2', 3', 4' \dots 10'$ , in  $m_1, m_2, m_3 \dots m_{10}$ . In tal modo saranno determinati ventitre punti della cicloide compresi gli estremi  $A, a$  della base ed il vertice  $B$ , nei quali tutti non rimarrà che far passare una linea continua. E se per più esattezza si volessero moltiplicare i punti basterà suddividere quanto si vogliono le singole parti della base e della circonferenza; e poi operare in modo simile.

Ecco la ragione della operazione. Nella posizione di mezzo in cui si trova il circolo genitore il vertice  $B$  rappresenta il punto generatore della cicloide  $ABa$ . Or bene, se consideriamo un altro punto qualunque come generatore, per esempio il  $6'$ , poichè l'arco  $C6'$  è uguale al segmento  $C6$  esso genera la medesima cicloide, la quale avrà invece il punto  $6$  di  $Aa$  per origine. Perciò fra le due origini  $A, 6$  corre la distanza  $A6$ : ma è chiaro che la stessa distanza deve esistere sulla parallela condotta dal punto  $6'$  fra le posizioni corrispondenti dei due punti generatori; dunque quando il punto generatore della cicloide ipotetica è giunto in  $6'$ , quello della cicloide descritta deve trovarsi in  $M_6$  sulla parallela condotta dal punto  $6'$  distante da esso di  $M_66' = A6$ .

349. All'artista meccanico che abbia ben compresa la generazione della cicloide non sarà difficile il concepire uno strumento capace di descrivere la curva con movimento continuo. Lo strumento deve necessariamente contenere come organo meccanico principale un circolo, di cui il centro sia obbligato a muoversi parallelamente ad un regolo mentre la circonferenza rotola sul medesimo regolo, e sulla circonferenza del quale sia fissato il lapis descrivente. Un simile strumento non potrebbe servire che per descrivere una sola cicloide: per ogni altra però bisognerà sostituire al circolo quello che ha la circonferenza corrispondente alla rispettiva base.

**Normali e tangenti della cicloide.** — 350. Condurre una normale ed una tangente alla cicloide  $ABa$  da un punto  $M$  preso sulla curva (fig. 228). Sull'asse  $BC$  descritto il circolo genitore si conduca da  $M$  la  $Mm$  parallela alla base  $Aa$  fino che lo incontra in  $m$ . Se si unisce il punto  $m$  col vertice  $B$  e col centro  $C$ , e dal punto dato  $M$  si conduce  $MT$  parallela a  $mB$  ed  $MN$  parallela ad  $mC$ , la  $MT$  sarà la *tangente* e la  $MN$  sarà la *normale* richiesta. Infatti supponendo che  $DmE$  sia la cicloide che genererebbe il punto  $m$ , quando il circolo genitore lascia la posizione che ha per contatto il punto di mezzo  $C$ , il punto  $m$  tende a descrivere un arco di cerchio intorno a  $C$ , il quale si confonderà per piccolissimo tratto con l'arco di cicloide che

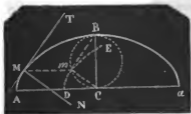


Fig. 228.

realmente descriverebbe; ma le corde  $mC$ ,  $mB$  del circolo genitore perpendicolari fra loro saranno l'una normale l'altra tangente all'archetto descritto da  $m$  col raggio  $mC$ ; dunque lo saranno pure alla cicloide ipotetica  $DmE$

nel punto  $m$ . Per conseguenza siccome le due cicloidi sono uguali, ed hanno le basi sulla stessa linea retta, devono avere le loro linee corrispondenti parallele, e quindi la tangente e la normale nel punto  $M$  saranno parallele rispettivamente alla tangente e alla normale del circolo nel punto  $m$ .

351. Rispetto alle tangenti ed alle normali da condursi alle estremità  $A$ ,  $a$  della base e al vertice  $B$ , eseguendo le medesime operazioni si troverebbe che le tangenti che hanno per contatti i punti  $A$ ,  $a$  sono parallele all'asse  $CB$  o perpendicolari alla base  $Aa$ , e quella che ha per contatto il punto  $B$  è invece parallela alla base  $Aa$  e perpendicolare all'asse  $CB$ , in conseguenza le normali delle estremità della cicloide si confondono colla base, e quella del vertice coincide coll'asse. Ora meglio

si comprenderà che la cicloide rovesciata  $Aba$  (fig. 226) di base uguale ad  $Aa$  e sotto ad essa insistente avendo le normali che si confondono pure colla base  $Aa$ , formerà effettivamente insieme con la cicloide superiore una curva continua rientrante di figura ovale (§ 347).

352. L'analisi dimostra che la cicloide è la evolvente di se medesima; vale a dire che se poste due mezze cicloidi  $AND$ ,  $and$  (fig. 229) una accanto all'altra colle basi  $ED$ ,  $DF$  sulla

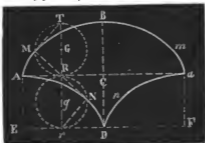


Fig. 229.

medesima direzione  $EF$  e formanti un punto di regresso nel loro contatto  $D$ , si attacca un filo o una corda in  $D$ , e si svolge dalla semicicloide  $AND$ , e poi si avvolge alla semicicloide  $Dna$  o viceversa, il punto  $A$  o il punto  $a$  descrive una intera cicloide  $ABa$  di cui la base  $Aa$  è parallela ed uguale alle basi  $ED$ ,  $EF$  prese insieme delle cicloidi che han servito di evolute.

Ammessa la verità della suaccennata proprietà, da un punto  $R$  qualunque della base  $Aa$  si elevi la perpendicolare  $TRr$ , e si descrivano i circoli genitori uguali  $G, g$  a contatto fra loro in  $R$ , e perciò coi diametri coincidenti colla perpendicolare  $TRr$ . Dai punti  $M, N$  ove i circoli tagliano rispettivamente le cicloidi conducendo dall'uno  $MR, MT$  e dall'altro  $NR, Nr$ , avremo la  $MR$  normale alla cicloide  $ABa$  in  $M$ , e la  $NR$  tangente alla semicicloide  $AND$  in  $N$  (§ 350); ma sappiamo che la tangente di una evolvente è la normale della rispettiva evolvente (§ 337, 4°). Dunque le rette  $MR, RN$  sono nella medesima direzione, e perciò la intera  $MN$  è il raggio di curvatura della cicloide  $ABa$  in  $M$ . Da ciò risulta che i due triangoli rettangoli  $RMT, RNr$  essendo uguali perchè hanno gli angoli  $MRT, NRr$



uguali come opposti al vertice, ed uguali le ipotenuse  $RT$ ,  $Rr$ , i lati  $MR$ ,  $NR$  saranno uguali, ossia  $MN = 2MR$ , cioè *il raggio di curvatura in un punto qualunque della cicloide è doppio della normale nel medesimo punto intercetta fra la curva e la base.* Nella futura lezione, indicate le varie applicazioni a cui può prestarsi la cicloide, mostreremo come questo principio serva alla rigorosa rettificazione e misura di questa curva.

---

## LEZIONE DECIMOTTAVA.

*Applicazioni della Cicloide — Misura della Cicloide. — Nozioni e proprietà generali delle Epicicloidi. — Descrizione e costruzione delle Epicicloidi. — Misura delle Epicicloidi. — Epicicloidi sferiche.*

**Applicazioni della Cicloide.** — 353. La cicloide è nella costruzione delle macchine una fra le curve importanti destinate alla trasmissione del movimento rettilineo in cir-

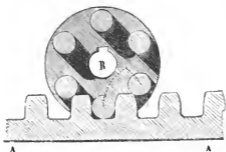


Fig. 230.

colare con una legge costante. Quando un'asta dentata AA (fig. 230) deve condurre un rocchetto o rota R armata specialmente di fusi cilindrici, i denti dell'asta che devono incastrare nei vani

dei fusi si formano con una porzione di cilindro cicloidale. E l'arco di cicloide che entra nella base di questo cilindro è generato da un circolo concentrico alla ruota e tangente all'asta. La meccanica geometrica insegna i modi che è necessario seguire nelle operazioni grafiche onde soddisfare alle condizioni richieste dai movimenti dei due pezzi.

354. Nell' arte di fabbricare la cicloide può in alcuni casi divenire una centina convenientissima per la costruzione degli

archi e delle volte a sesto scemo (*fig. 231*) o a sesto rialzato (*fig. 232*). Pei primi non si può impiegare la Cicloide che nel solo caso in cui il rapporto della corda  $Aa$  alla saetta  $cB$  sia  $\frac{22}{7}$ , pei secondi quando quel rapporto sia al contrario  $\frac{14}{11}$

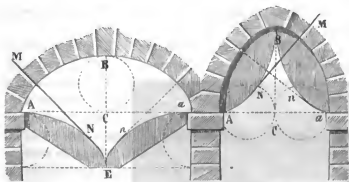


Fig. 231.

Fig. 232.

(§ 347). Negli archi a sesto scemo (*fig. 231*) la corda  $Aa$  deve essere la base della cicloide, e la saetta  $CB$  deve esserne l'asse. Viceversa gli archi a sesto rialzato (*fig. 232*) si compongono di due mezze cicloidi  $AB$ ,  $aB$  di cui gli assi  $CA$ ,  $Ca$  formano insieme la corda  $Aa$  e le semibasi coincidono con la saetta  $CB$ , e le quali sono tangenti ai piedritti, e si riuniscono nel vertice  $B$  dell'arco senza formare angolo, poichè questo punto corrispondendo in ciascuna curva ad un punto di regresso, le tangenti vi sono perpendicolari a  $BC$  e si confondono (§ 351).

Nella costruzione di archi siffatti impiegando due sagome cicloidalì  $ANE$ ,  $anE$  (*fig. 231*) disposte al di sotto della corda  $Aa$ , o  $ANB$ ,  $anB$  (*fig. 232*) disposte al di sopra della medesima nel modo analogo a quello indicato per gli archi simili formati dalla evolvente di circolo (§ 344), e come apparisce dalla ispezione delle figure; poichè la cicloide è evolvente di se medesima (§ 352) avvolgendovi e svolgendo pure una corda su ciascuna di esse, non solo descriveremo la centina dell'arco a

sesto scemo o rialzato, ma colla porzione tesa MN avremo sempre la direzione che devono successivamente avere le committiture dei cunei, colla stessa facilità con cui si opererebbe per gli archi circolari. In generale per gli archi di cui la centina fosse formata di una curva qualunque si potrebbe operare in un modo perfettamente simile impiegando delle sagome formate con la evoluta di quella curva.

355. Credo che debba interessare gli artisti il mostrare un breve confronto della cicloide con la ellisse e la cassinoide

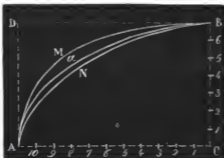


Fig. 233.

ovale, relativamente al loro impiego nella costruzione degli archi e delle volte. Sia ADBC (fig. 233) un rettangolo di cui i lati AC, CB stieno come 11 a 7, e consideratili uno semi-corda l'altro saetta, si descrivano colle re-

gole insegnate le metà di una Cassinoide AMB, di una Ellisse AaB, e di una Cicloide ANB. La differenza sensibile che offrono fra loro queste tre curve considerate come centine di un arco influisce molto sulla loro solidità. La teoria e la esperienza insieme dimostrano che negli archi a sesto scemo quanto è maggiore la curvatura verso la sommità tanto minore è la spinta. Così la ellisse essendo compresa fra la cicloide posta internamente e la cassinoide esternamente spingerà più della prima e meno della seconda. Quando adunque si ha in mira la solidità bisogna che la curvatura della centina si avvicini più a quella della cicloide che non a quella della ellisse e molto meno della cassinoide; ma però la cicloide non conviene che al solo caso in che il rapporto della semi-corda alla saetta è  $\frac{11}{7}$ . La cassinoide

de è più aperta e meglio apparisce riunita tangenzialmente ai piedritti, e può impiegarsi utilmente negli archi dei ponti ove si richiede una sezione più ampia, (§ 280) ma esigerà maggior grossezza in alcune sue parti per resistere alla sua maggiore spinta, e non converrà che si casi in cui il rapporto della saetta alla semicorda è compreso fra 1 e  $\frac{2}{7}$ <sup>1</sup> (§ 279).

La ellisse ha una curvatura media fra la cassinoide e la cicloide, anzi si accosta più alla seconda che alla prima, e riunisce ad un tempo solidità e regolarità, perciò dovrà esser sempre preferita nelle costruzioni, tanto più che gode della preziosa proprietà di prestarsi a qualunque rapporto della corda con la saetta, e di costruirsi con maggior facilità.

356. Perchè un grave lasciato libero a se stesso discenda obliquamente da una data altezza nel più breve tempo possibile, è matematicamente dimostrato esser necessario che percorra un arco di cicloide che passi pel punto di partenza e pel termine (fig. 234)

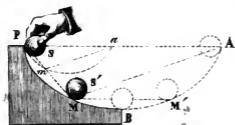


Fig. 234.

della corsa. Per questa legge appunto la Cicloide è conosciuta nella fisica col nome di *Curva Brachistocrona*.<sup>2</sup> Sia per esem-

<sup>1</sup> Questi rapporti vengono indicati tanto per la cicloide che per la cassinoide trattandosi di archi a sesto scemo, ma per gli archi a sesto rialzato perchè le locuzioni adoperate rimangano esatte vanno rovesciati; cioè per la cicloide bisogna ritenere la frazione  $\frac{7}{44}$  e per la cassinoide  $\frac{7}{2}$ .

<sup>2</sup> Una tale denominazione proviene da due parole greche che le danno il significato di *curva di brevissima durata*.

pio  $P$  il punto di partenza di una sfera pesante  $S$ , ed  $M$  il punto a cui deve arrivare. Per determinare l'arco di cicloide che deve passare per questi due punti si tiri l'orizzontale  $PA$ , e preso un segmento qualunque  $Pa$  per base si descriva una cicloide  $Pma$  (§ 348); di poi si conduca la retta  $PM$ , e si unisca il punto d'intersezione  $m$  della curva col punto  $a$ , e in fine da  $M$  si tiri  $MA$  parallela a  $ma$ . I triangoli simili  $Pma$ ,  $PMA$  daranno  $Pm : PM :: Pa : PA$ ; ma tutte le cicloidi ordinarie essendo curve simili (§ 347), le loro linee corrispondenti sono proporzionali; dunque il segmento  $PA$  sarà la base della cicloide che passerà per i punti dati  $P$  ed  $M$ . Or bene, se si dispone una tavola di cui il profilo  $PMB$  della superficie abbia l'andamento della cicloide descritta sulla base  $PA$ , la sfera  $S$  lasciata libera a se stessa rotolerà su di essa fino in  $M$  impiegando un tempo più corto di quello che impiegherebbe a percorrere qualunque altra superficie che passasse per medesimi punti, fosse anco un piano inclinato  $PM$ , sul quale seguirebbe il più corto cammino.

357. Inoltre è legge fisica che la cicloide è la curva delle discese della medesima durata, vale a dire che i corpi di uguale peso discendono da diverse altezze nel medesimo tempo quando percorrano in tempi uguali archi di una stessa cicloide differenti in lunghezza. Così per esempio due sfere  $S, S'$  (fig. 234) ugualmente pesanti, partendo contemporaneamente dai punti  $P$  ed  $M$  discendono per la cicloide in un terzo punto  $B$  alla fine del medesimo tempo, quantunque la prima  $S$  abbia a percorrere un arco  $PB$  più lungo dell'arco  $MB$  che deve percorrere la seconda  $S'$ . Di più in un tempo uguale a quello che hanno impiegato a discendere potranno rimontare sulla cicloide l'una in  $M'$  l'altra in  $A$ , essendo  $MM'$  parallela alla orizzontale  $PA$ .

Queste medesime proprietà si verificheranno pure nella porzione di arco del circolo osculatore della cicloide che si confonde sensibilmente colla curva, ma questo arco è piccolissimo, e non oltrepassa i 4 o 5 gradi.

358. Si supponga adesso che la figura 229 venga rovesciata. Se un pendolo da orologio BL (*fig.* 235) terminato da una lama cB d'acciaio flessibilissima si sospende in B fra due porzioni mn, m'n' di cilindri cicloidali e si fa oscillare, la lama CB si

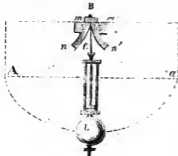


Fig. 235.

applicherà ora sopra mn ora sopra m'n', e perciò il centro L. della lente descriverà costantemente un arco della cicloide ALa (§ 352). Ma gli archi cicloidali sono descritti da un corpo in tempi uguali, (§ 357) dunque le oscillazioni del pendolo sono isocrone, cioè si compiono in tempi uguali.

Un orologio con un pendolo così disposto camminerebbe con la maggior regolarità, ma essendo difficile il costruirlo perfettamente e preservarlo dalle alterazioni della temperatura, la pratica si contenta di far descrivere alla lente l'arco piccolissimo di 4 o 5 gradi del circolo osculatore nel punto più basso della cicloide (§ 357). Gli orologi adunque camminano più regolar-

mente quanto meno i pendoli oscillando si allontanano dalla verticale.

**Misura della cicloide.** — 359. La cicloide essendo geometricamente rettificabile (§ 71) si potrà averne esattamente la misura lineare.



Fig. 236.

Poichè la cicloide è evolvente di se medesima (§ 352) la semicicloide BMA (*fig.* 236) avrà la medesima lunghezza del rag-

gio di curvatura  $Ab$  della evolvente  $Bnb$ ; ma il raggio  $Ab$  è uguale al doppio di  $Ac$  ossia di  $CB$  (§ 352) dunque la semicicloide  $BMA$  equivale a due volte  $CB$ , e quindi la intera  $aBA$ , a quattro volte la medesima  $CB$ : perciò si misura l'intera cicloide prendendo il quadruplo del suo asse, ossia del diametro del circolo genitore.

360. Per le medesime ragioni un arco  $BM$  di cicloide sarà uguale al doppio della porzione  $Nn$  del raggio di curvatura della sua evolvente, ma dall'estremità  $M$  conducendo  $MQ$  parallela alla base  $Aa$  e tirando  $BQ$  si ha  $Nn = Mn = BQ$ . Dunque  $BM = 2BQ$ : cioè si misura un arco di cicloide che parte dal vertice prendendo il doppio della corda corrispondente del circolo genitore.

Per un altro arco  $BM'$  conducendo da  $M'$  la  $M'Q'$  parallela ad  $Aa$  e tirando  $BQ'$  avremo parimente  $BM' = 2BQ'$ , e sottraendo il primo arco dal secondo avremo

$$MM' = BM' - BM = 2(BQ' - BQ)$$

cioè si misura un arco qualunque di cicloide prendendo il doppio della differenza delle corde del circolo genitore corrispondenti alle sue estremità.

361. Rispetto alla superficie della cicloide la geometria analitica dimostra che tirando da un punto  $M$  qualunque (fig. 236) le  $Mq$ ,  $MD$  parallele rispettivamente ad  $Aa$  e a  $BC$ , l'area  $MBD$  esterna alla cicloide equivale alla metà del segmento circolare  $QBq$ . Ciò posto sarà l'area della semicicloide

$$(1) ABC = AcBC - BA_c;$$

ma il principio ammesso dovendo verificarsi anco pel punto

$A$  abbiamo l'intera area esterna  $BA_c = \frac{1}{2} \times \pi \overline{BC}^2$ ; e siccome la semibase  $AC = \frac{\pi \cdot BC}{2}$  (§ 346) abbiamo inoltre il ret-

tangolo  $AcBC = AC \times BC = \pi \cdot \frac{\overline{BC}^2}{2}$ , dunque sostituendo nella



(1) queste espressioni equivalenti avremo

$$ABC = \pi \cdot \frac{\overline{BC}^2}{2} - \frac{1}{2} \pi \cdot \frac{\overline{BC}^2}{4} = \frac{3}{2} \pi \cdot \frac{\overline{BC}^2}{4};$$

e per conseguenza

$$\Delta Ba = 2 \cdot ABC = 3 \cdot \pi \cdot \frac{\overline{BC}^2}{4};$$

cioè, essendo  $\pi \cdot \frac{\overline{BC}^2}{4}$  il circolo di diametro BC, si misura l'area della intera cicloide prendendo il triplo di quella del circolo genitore.

362. Da tutto ciò ne inferiremo che: 1° sarà il segmento  $MBm = MDdm - mBd - MBD$ ; ma è  $MDdm = Mm \times Bp$  e

$$mBd = MBD = \frac{1}{2} QBq \text{ (§ 361). Dunque avremo}$$

$$MBm = Mm \times Bp - QBq, \text{ cioè:}$$

il segmento cicloidale formato da una corda parallela alla base si misura togliendo il segmento circolare corrispondente dal rettangolo fatto dalla corda e dall'altezza.

2° Sarà il segmento  $AMP = AcDP - AcDM$ ; ma abbiamo

$$AcDP = AP \times BC, \text{ e}$$

$$AcDM = ABc - BMD = \frac{BQCq}{2} - \frac{QBq}{2} = \frac{QCq}{2},$$

dunque avremo  $AMP = AP \times BC - \frac{QCq}{2}$ ; cioè il segmento

cicloidale formato da una corda parallela all'asse si misura togliendo il segmento circolare corrispondente dal rettangolo fatto dalla corda e dalla larghezza

3° Infine è chiaro che il segmento  $Msm'$  terminato da una

corda qualunque  $MM'$  si misura togliendo dalla differenza dei due segmenti  $APM$ ,  $AP'M'$  l'area del trapezio  $PMM'P'$ .<sup>1</sup>

### Epiteloide.

#### Nozioni e proprietà generali delle epiteloide. —

363. Facendo rotare un circolo mobile  $c$  (fig. 237) sopra un cerchio fisso  $C$  situato nel suo medesimo piano senza strisciare, e procurando che i circoli non cessino mai di toccarsi, mentre il centro  $c$  descrive un circolo intorno al centro fisso  $C$  con un raggio uguale alla somma  $cA + CA$  dei raggi dei due circoli, il primitivo punto di contatto  $A$  descriverà la *epiteloide*  $ABa$  (§ 335, 3°) nel modo analogo indicato per la *Cicloide* (§ 346).

364. Il circolo mobile  $c$  si chiama *epiciclo* ed il circolo fisso  $C$  si chiama *deferente*.<sup>2</sup> Quando l'epiciclo dopo una intera rotazione sarà giunto nella posizione  $c'$  (fig. 237), il primitivo punto di contatto  $A$  si troverà nuovamente in contatto col deferente in un secondo punto  $a$ , e la circonferenza del primo si sarà interamente sviluppata su quella del secondo.

<sup>1</sup> L'indicazione di questa regola vale pel caso in cui la corda  $MM'$  sia situata da una parte dell'asse  $CB$  della cicloide, ma quando la corda  $Mm'$  tagli l'asse  $CB$ , per avere la misura del segmento  $MBm'$  si toglierà dalla intera cicloide  $ABa$  la somma del trapezio  $Pm'm'p'$  e dei segmenti  $APM$ ,  $ap'm'$ .

<sup>2</sup> Se si immagina che il raggio dell'epiciclo vada continuamente crescendo fino a divenire infinito, la circonferenza di esso si confonde con una linea retta, e la epiteloide si cangerà in una evolvente del circolo deferente. Se poi si suppone infinito il raggio del deferente la sua circonferenza si confonderà pure con una linea retta, e la epiteloide si cangerà in una cicloide. Perciò la evolvente e la cicloide si possono considerare come casi particolari della epiteloide.



Fig. 237.

e perciò l'arco  $AOa$  del deferente compreso fra l'origine  $A$  ed il successivo punto di contatto  $a$ , ossia la lunghezza della base della epicloide è uguale alla circonferenza dell'epiciclo. È chiaro che conducendo pel punto di mezzo  $O$  della base  $AOa$  il raggio  $CO$  prolungato fino che incontra la epicloide in  $B$ , il punto  $B$  sarà il più lontano dal centro fisso  $C$ , e la porzione  $OB$  sarà uguale al diametro dell'epiciclo, e dividerà la epicloide in due parti uguali e simmetriche.

365. Quando il raggio  $Ac$  dell'epiciclo è più piccolo di quello  $AC$  del deferente, la base  $AOa$  (fig. 237) della epicloide  $ABa$  abbraccia un arco minore di  $360^\circ$ , e la circonferenza dell'epiciclo per un giro del suo centro  $c$  intorno a  $C$  potrà svilupparsi più di una volta sulla circonferenza del deferente.

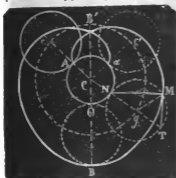


Fig. 238.

Ma quando l'epiciclo è maggiore del deferente (come nella fig. 238) il centro  $c$  di esso partendo dalla linea  $Cc$  dei centri che passa per l'origine ha da descrivere uno o più giri intorno a  $C$  avanti che il primitivo punto di contatto  $A$  torni a toccare il deferente in un secondo punto  $a$ . In conseguenza la epicloide

$AB'BB'a$  avrà evidentemente uno o più *punti doppi*, cioè si in-

<sup>1</sup> Supponendo che il centro dell'epiciclo seguiti anco all'infinito a girare intorno al centro del deferente avremo una curva estesa all'infinito, la quale si comporrà di un numero infinito di epicloidi uguali, e che avrà altrettanti punti di regresso. Se però il raggio dell'epiciclo è contenuto in quello del deferente un numero  $n$  intero di volte, poichè ad ogni suo giro il punto descrivente torna a percorrere il medesimo cammino percorso nel giro precedente, la intera curva si comporrà di  $n$  epicloidi uguali, ed avrà  $n$  punti di regresso. La base poi di ogni epicloide sarà la parte  $n^{esima}$  della circonferenza del deferente.

tersecherà con sè stessa in un punto  $B'$ , o in più punti situati sulla linea di simmetria  $BB'$ , e la base  $AaOAa$  della epicicloide sarà maggiore di una o più circonferenze intere del deferente; vale a dire che il numero dei punti d'intersezione della epicicloide e il numero di circonferenze del deferente contenuto nella base sono proporzionali al numero dei giri del centro dell'epiciclo, ossia al numero intero di volte che il raggio dell'epiciclo contiene quello del deferente. <sup>1</sup>

Nel caso poi particolare che i raggi dei due circoli sieno uguali la epicicloide sarà rientrante in se stessa, presenterà unicamente un punto di regresso all'origine, ed avrà per base la circonferenza del deferente.

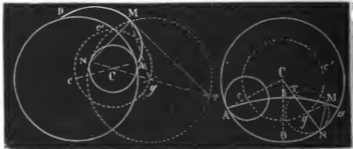


Fig. 239.

Fig. 240.

366. Se i due circoli si toccano in modo che l'uno presenti la sua convessità alla concavità dell'altro e viceversa, cioè se uno è contenuto nell'altro, prendendo per epiciclo il circolo più grande esso può farsi rotare con la sua concavità sulla convessità del più piccolo, e la curva  $AMD$  (fig. 239) generata dal pri-

<sup>1</sup> Anco per questo caso varrà l'osservazione della nota precedente; se non che quando il raggio dell'epiciclo contenga invece un numero  $n$  intero di volte quello del deferente ci vorranno  $n$  giri del primo per descrivere la epicicloide, la quale avrà  $n-1$  punti doppi ed un punto di regresso, ed avrà la base uguale ad  $n$  circonferenze del deferente. Inoltre dopo ogni  $n$  giri il punto descrivente percorrerà nuovamente la medesima epicicloide.

mitivo punto di contatto  $A$  si troverà pure al di fuori del deferente come nella figura; oppure facendo rotare il circolo minore preso per epiciclo con la sua convessità sulla concavità del più grande, la curva  $ABa$  sarà tutta nell'interno del deferente come nella (*fig. 240*). Le curve generate in ambedue questi casi sono della medesima natura delle epicicloidi precedentemente considerate, e godono delle medesime proprietà, ma vengono più particolarmente distinte col nome di *Ipicicloidi*.<sup>1</sup>

367. In queste curve è solo notevole il caso in cui il diametro  $CA$  dell'epiciclo interno (*fig. 241*) è uguale al raggio del deferente. Supponiamo che il circolo  $CcA$  dalla prima sua posizione



Fig. 241.

sia passato in un'altra posizione qualunque  $Cc'A'$ ; se si prende sulla sua circonferenza un arco  $A'm$  uguale in lunghezza all'arco  $A'A$ , il punto  $m$  dovrà trovarsi sulla ipocicloide descritta dal primitivo punto di contatto  $A$ ; ma conducendo la retta  $Cm$

ed il raggio  $CA$  l'arco  $A'm$  deve contenere il doppio dei gradi contenuti nell'arco  $A'A$  perchè il raggio  $CA$  è doppio del raggio  $c'm$ , e per conseguenza l'angolo  $A'cm$  misurato dalla metà dell'arco  $A'm$  è uguale all'angolo  $A'CA$  misurato dall'intero arco  $A'A$ ; dunque la retta  $Cm$  ed il raggio  $CA$  coincideranno insieme, ed il punto  $m$  caderà su questo ossia sul diametro  $Aa$ . E siccome lo stesso si può dimostrare per qualunque posizione dell'epiciclo, perciò tutti i punti della curva descritta si troveranno sul diametro  $Aa$ ; cioè la *ipocicloide generata da un*

<sup>1</sup> Tutte le considerazioni che far si possono sulle epicicloidi si estenderanno indistintamente anco alle ipocicloidi, e vi si applicheranno pure le osservazioni delle note precedenti, giacchè qui non abbiamo creduto di alcun vantaggio l'intraprendere un esame particolare di queste curve.

*punto dell'epiciclo interno di cui il diametro è uguale al raggio del deferente si confonde col diametro dello stesso deferente.*

368. Tutte le curve di natura epicicloideale di cui abbiamo fin qui tenuta parola godono di una proprietà comune, che le rende proprie ad essere applicate alla forma dei denti di due ruote circolari perchè nel trasmettersi il movimento mantengano sempre il medesimo rapporto fra le loro velocità. <sup>1</sup>

Consideriamo il circolo genitore ossia l'epiciclo giunto in una posizione qualunque MTN (*figg.* 237, alla 240) nella quale il primitivo punto di contatto, ossia il punto descrivente A della curva, si trovi in M. Se da M si conducono le corde MN, MT l'una al punto di contatto N dell'epiciclo col deferente, l'altra all'estremità T del diametro condotto per N, queste due corde saranno perpendicolari fra loro perchè l'angolo NMT resta inscritto in un semicircolo. Ora mentre l'epiciclo prosegue a ruotare, il punto M tenderà a descrivere un arco di cerchio intorno al punto N come centro, e la corda MN si confonderà allora colla direzione del raggio di curvatura della epicicloide; ma il raggio di curvatura è sempre normale alla curva; dunque in qualunque epicicloide la normale passa costantemente pel punto di contatto dell'epiciclo col deferente.

369. Condurre una normale ed una tangente ad un punto M della epicicloide, dati l'epiciclo ed il deferente (*figg.* 237 alla 240). Si descriva la circonferenza *cgc'* concentrica al deferente, nella epicicloide con un raggio uguale alla somma dei raggi CA, cA dell'epiciclo e del deferente (*figg.* 237, 238), e nella ipocicloide uguale alla differenza dei medesimi raggi (*figg.* 239, 240): si faccia poi centro nel punto dato M, e col raggio Mg uguale a quello dell'epiciclo si tagli in g la circonferenza *cgc'*, e collo stesso

<sup>1</sup> Nelle lezioni di meccanica geometrica quando tratteremo della costruzione delle ruote faremo conoscere le regole per applicare convenientemente le epicicloidi, delle quali la comune proprietà è richiesta dalle condizioni geometriche del movimento.

raggio  $gM$  si descriva l'epiciclo  $MNT$ . È chiaro che la retta  $MN$  condotta dal punto dato  $M$  al punto di contatto  $N$  sarà la normale richiesta, (§ 368) e quindi la retta  $MT$  condotta dallo stesso punto  $M$  all'estremità  $T$  del diametro  $NT$  sarà la tangente.<sup>1</sup>

370. Descrivere per punti la epicicloide dato l'epiciclo  $c$  ed il deferente  $C$  (fig. 242). Qualunque sia il rapporto dei raggi dei



Fig. 242.

due cerchi si divida la circonferenza dell'epiciclo in qualsivoglia numero di parti uguali, per esempio in 42, e si riportino sulla circonferenza del deferente metà da una parte e metà dall'altra del punto di contatto  $O$ . L'arco  $AOa$  sarà la base della epicicloide. Si numerino progressivamente i punti

di divisione dell'epiciclo andando da  $O$  verso  $B$  per ciascun lato, e quello del deferente andando da  $A$  e da  $a$  verso  $O$ . Coi raggi  $C1, C2, C3, C4, C5$  si descrivano altrettanti archi concentrici al deferente, e facendo centro nei punti  $I, II, III, IV, V$  con aperture di compasso uguali alle corde  $O1, O2, O3, O4, O5$  si taglino rispettivamente gli archi segnati del numero corrispondente nei punti  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$  da una parte, e nei punti  $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5$  dall'altra. La curva che si farà passare per i punti  $A, B, a$  e per tutti i punti d'intersezione così determinati sarà l'epicicloide richiesta. Infatti descrivendo l'epiciclo  $C_3$  corrispondente ad un punto  $III$  di contatto, siccome il raggio  $III m_3$  che ha determinato il rispettivo punto  $m_3$  ha per

<sup>1</sup> Siccome la evolvente e la cicloide sono un caso particolare della generazione della epicicloide (nota 4 del § 364), le regole che insegnammo per condurvi la tangente e la normale (§§ 343, 350) si trovano comprese in questa più generale di cui abbiamo ora parlato.

costruzione la medesima posizione rispetto al deferente che la corda  $O3$ , il punto  $m_3$  sarà situato sulla circonferenza dell'epiciclo  $c_3$ , ma allora l'arco  $III m_3$  è uguale all'arco  $O3$  e per conseguenza all'arco del deferente  $III a$ ; dunque il punto  $m_3$  appartiene alla curva, come si potrà dimostrare per tutti i punti determinati. <sup>1</sup>

371. Considerando il modo col quale abbiamo supposta generata la epicicloide ognuno adesso è in grado di formarsi l'idea di uno strumento capace di descriverla. Poichè gli angoli formati rispettivamente dal raggio dell'epiciclo che passa pel punto descrivente, e dal raggio del deferente che passa pel punto di contatto sono descritti nello stesso tempo, la geometria elementare ci insegna che essi saranno inversamente proporzionali ai medesimi raggi. Dunque è chiaro che in un tale stromento un lapis deve girare intorno ad un punto, mentre questo punto è obbligato a girare intorno al centro di un circolo fisso, in modo che le distanze del lapis e del punto dei rispettivi centri descrivano angoli a loro inversamente proporzionali. Questo stromento si chiama *compasso epicicloideale* o *epiciclografo*. Il marchese Luigi Ridolfi ha sugli esposti principii immaginato un epiciclografo proprio a disegnare qualunque epicicloide o ipocicloide, del quale crediamo interessante il dare la seguente descrizione. <sup>2</sup>

372. Ecco in che consiste essenzialmente l'epiciclografo del marchese Ridolfi. Due colonnette  $PQ$ ,  $P'Q'$  (*fig. 243*) innalzate sopra un piano  $PP'$  sostengano una spranga orizzontale  $QQ'$ . Nel

<sup>1</sup> Questo processo si impiegherà indistintamente tanto per le epicicloidi quanto per le ipocicloidi generate in ambedue i casi contemplati nel § 366.

<sup>2</sup> Il signor Luigi dei marchesi Ridolfi ha ampiamente descritto il suo epiciclografo, ed analiticamente sviluppata la teoria delle epicicloidi da esso disegnate in una sua bella memoria « di alcuni usi delle epicicloidi e di uno stromento per la loro descrizione. — Firenze 1844. »



mezzo di  $QQ'$  è fissata immobilmemente una rotella  $RR'$ , nel centro della quale gira verticalmente l'asse  $AA'$  di rotazione dello stromento. Una verga orizzontale  $SS'$  armata di denti ed infilata nella estremità inferiore dell'asse  $AA'$  può scorrere e fissarsi a piacimento mediante un rocchetto  $b$ , o per mezzo di un altro meccanismo qualunque. In un anello  $g$  praticato nella verga  $SS'$  gira un secondo asse  $aa'$ , il quale porta nella estremità superiore un'altra rotella  $rr'$  e nella inferiore scorre una seconda verga  $ss'$  a modo della prima, ovvero per mezzo della vite continua  $vv'$ : infine nella estremità  $s$  della verga  $ss'$  è collocata una matita o lapis  $mM$ . Adesso si fissi e si avvolga sulla rotella  $RR'$

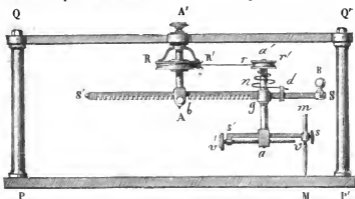


Fig. 243.

una corda o una catenella già fissata ed avvolta sulla rotella  $rr'$ , della quale la porzione compresa fra le due rotelle sia tenuta continuamente in tensione da una molla spirale  $n$  avvolta e fissata per un capo all'asse  $aa'$  e per l'altro in un punto fisso  $d$  della verga  $SS'$ . Se si fissano le verghe  $SS'$ ,  $ss'$  entro i loro rispettivi manicotti  $A$ ,  $a$  in modo che la differenza  $Ag - as$  stia alla distanza  $as$  come il raggio della rotella  $RR'$  sta al raggio della rotella  $rr'$ , e col manico  $B$  si fa girare lo stromento intorno l'asse principale  $AA'$ , la corda mentre si avvolge sulla rotella  $RR'$  si svolge dalla rotella  $rr'$ , e fa girare nello stesso tempo intorno

l'asse  $aa'$  il lapis  $M$ , il quale adunque per il principio esposto segnerà la epicloide quando il filo sia avvolto sulla rotella  $RR'$  in senso contrario che sulla rotella  $rr'$ , e segnerà la ipocicloide quando vi sia avvolto nel medesimo senso. <sup>1</sup> L'epiciclografo Ridolfi esige la costruzione di una coppia di rotelle per ogni nuova epicloide secondo il rapporto dei raggi dell'epiciclo e del deferente; ma credo che la meccanica eviterà questo inconveniente sostituendo alle rotelle un meccanismo diverso capace di dare qualunque rapporto dei circoli. <sup>2</sup>

**Misura della epicloide.** — 373. Le epicloidi, noti che sieno i raggi dell'epiciclo e del deferente, si possono geometricamente rettificare. Se  $Oc$  è il raggio dell'epiciclo (*fig. 244*) e  $OC$  quello del deferente, la lunghezza della metà della epicloide  $Aba$  si ottiene colla proporzione

$$CO : CO + cO :: 4cO : \frac{ABa}{2}$$

d'onde essendo  $CO = \frac{OB}{2}$ ,  $cO = \frac{Ob}{2}$

è la intera epicloide

$$(1) \quad Aba = 4 (OB + Ob) \frac{Ob}{OB}$$

<sup>1</sup> In questo secondo caso quando il diametro della rotella  $rr'$  è uguale al raggio della rotella  $RR'$  e il diametro dell'epiciclo è pure uguale al raggio del deferente, il lapis  $M$  descrive una linea retta; ma se il rapporto dei circoli è qualunque altro, l'epiciclografo diviene un vero compasso ellittico, e la ellisse descritta ha i semiassi maggiore e minore uguali rispettivamente ad  $Ag + as$  e ad  $Ag - as$ .

<sup>2</sup> Il meccanismo da me immaginato rende lo strumento un poco più complicato, ed esige molta diligenza dal costruttore, ma il vantaggio che arreca nell'usarlo compenserà la maggior difficoltà di costruzione, la quale dispenserà inoltre la serie non indifferente di coppie di rotelle di cui va corredato l'epiciclografo Ridolfi. In altro luogo mi propongo di far conoscere il principio e la costruzione dell'epiciclografo da me modificato.

cioè si ottiene la misura lineare della intera epicicloide prendendo il quadruplo del prodotto numerico della somma dei diametri dei cerchi pel rapporto dei medesimi. Per la ipocicloide  $AB'a$  di cui il raggio dell'epiciclo sia  $c'O$ , in un modo analogo avremo invece

$$(2) \quad AB'a = 4 (OB - Ob') \frac{Ob'}{OB};$$

cioè si misura la intera ipocicloide prendendo il quadruplo del prodotto numerico della differenza dei diametri dei cerchi pel rapporto dei medesimi.<sup>1</sup>

374. Per avere la misura di un arco  $bM$  di epicicloide  $Aba$  (fig. 244) che abbia una sua estremità nel vertice  $b$ , o di un arco



Fig. 244

$bM'$  di ipocicloide  $AB'a$  che abbia una sua estremità nel vertice  $b'$ , si descriverà col raggio  $CM$  l'arco  $Mm$ , e dal punto  $m$  si condurrà nell'epiciclo la corda  $bm$ , o si descriverà col raggio  $CM'$  l'arco  $M'm'$ , e dal punto  $m'$  si condurrà la corda  $b'm'$  nel rispettivo epiciclo, e quindi nella espressione (1) sostitui-

remo  $\frac{bm}{OB}$  invece del rapporto  $\frac{Ob}{OB}$ ,

e nella espressione (2) sostituiremo il rapporto  $\frac{b'm'}{OB}$  invece di

<sup>1</sup> Se si sommano i valori (1) (2) e vi si pone  $Ob' = Ob$  avremo

$$Aba + Ab'a = 8. Ob; \text{ cioè}$$

la lunghezza della curva rientrante  $Abab'A$  (fig. 244) formata dalla epicicloide e dalla ipocicloide aventi lo stesso deferente e lo stesso epiciclo equivale a otto volte il diametro dell'epiciclo comune; ma la lunghezza della cicloide è uguale al quadruplo del diametro del circolo genitore; (§ 359) dunque la curva  $Abab'A$  equivale al doppio della cicloide generata dall'epiciclo comune.

quello  $\frac{O\mathcal{U}}{OB}$ . Effettuati i calcoli come per le intere curve, avremo

nel primo caso la misura dell'arco  $bM$  della epicloide e nel secondo quella dell'arco  $\mathcal{U}'M'$  della ipocicloide. Poichè la ipocicloide di cui il diametro dell'epiciclo è uguale al raggio del deferente si confonde col diametro di quest'ultimo (§ 367), la regola insegnata se è geometricamente esatta deve mostrare la verità di quella medesima proprietà: infatti facendo nella espressione (2)  $Ob' = \frac{1}{2} OB'$  avremo appunto  $A\mathcal{U}'a = OB$ .

375. Le superficie poi  $AbaOA$ ,  $A\mathcal{U}'aOA$  (fig. 244) sono rispettivamente rappresentate dalle espressioni

$$(3) \quad AbaOA = \pi \cdot \frac{\overline{Ob}^2}{4} \times \frac{(3OB + 2Ob)}{OB}$$

$$(4) \quad A\mathcal{U}'aOA = \pi \cdot \frac{\overline{Ob'}^2}{4} \times \frac{(3OB - 2Ob')}{OB}$$

Dalla (3) si rileva che si misura la superficie epicloideale racchiusa fra la intera epicloide e la sua base moltiplicando la misura dell'area dell'epiciclo per il quoziente che si ottiene dal dividere per il diametro del deferente il triplo del diametro stesso accresciuto dal doppio del diametro dell'epiciclo. Dalla (4) si rileva finalmente che si misura la superficie ipocicloideale racchiusa come sopra, moltiplicando l'area dell'epiciclo per il quoziente che nasce dal dividere pel diametro del deferente il triplo del diametro stesso diminuito invece del doppio del diametro dell'epiciclo. <sup>1</sup>

<sup>1</sup> Se in un modo analogo alla nota 1 del § 373 si sommano i valori (3) e (4) e si pone  $Ob' = Ob$  (fig. 244) avremo

$$AbaOA + A\mathcal{U}'aOA = 6 \cdot \pi \cdot \frac{\overline{Ob}^2}{4};$$

cioè la superficie  $Aba\mathcal{U}'a$  racchiusa dalla epicloide e dalla ipocicloide

Se nella (4) si pone  $Ob' = \frac{OB}{2}$  avremo

$$Ab'aOA = \frac{1}{2} \pi \cdot \frac{OB^2}{4};$$

cioè la misura della ipocicloide, di cui il diametro dell'epiciclo uguaglia il raggio del deferente, è data da quella del semicircolo deferente; il che appunto dovendo accadere sotto un tal rapporto dei raggi dimostra il rigor geometrico della suddetta regola.<sup>1</sup>

**Epicycloidi sferiche.** — 376. Dalla geometria elementare sappiamo che quando due coni retti hanno gli apotemi uguali ed i vertici situati in uno stesso punto le circonferenze delle basi si trovano interamente sopra la superficie di una sfera di raggio uguale ai loro apotemi e col centro nel punto comune dei vertici. Or bene se un cono mobile  $bVA$  (*fig. 245*) si fa rotolare senza strisciamento sopra un cono fisso  $AVB$  in modo che i due coni abbiano i vertici nello stesso punto  $V$ , la circonferenza della base  $Ab$  del primo sarà sempre sulla superficie della sfera che ha il centro nel vertice comune  $V$ , e per raggio  $AV$ . In questo movimento il primitivo punto di contatto  $A$  delle circonferenze delle basi  $Ab$ ,  $AB$  descriverà



Fig. 245.

aventi lo stesso deferente e lo stesso epiciclo equivale al sestuplo dell'area dell'epiciclo comune. Ma la superficie della cicloide è uguale al triplo del circolo genitore (§ 361); dunque la superficie  $Abab'A$  equivale al doppio di quella della cicloide generata dall'epiciclo comune.

<sup>1</sup> Le curve epicycloidali godono di moltissime proprietà, le quali per essere convenientemente sviluppate richiederebbero un trattato speciale. Per l'uso però che ne possono ricavare le Arti credo possa bastare quello che ne ho esposto.

sulla superficie della sfera una curva analoga a quelle che abbiamo finora considerate, e che per questa ragione si chiama *epicicloide sferica*. Il lato AV che passa pel punto descrivente A genererà durante il movimento del cono mobile una superficie conoidale (nota 2 del § 105), che avrà per vertice il punto V e per base la epicicloide sferica descritta dal punto A. La epicicloide sferica va soggetta a tutte le varietà della epicicloide piana e gode delle medesime proprietà; perciò potremo estendere facilmente alla prima tutte le considerazioni che abbiamo fatte per la seconda. La epicicloide sferica si applica alla forma dei denti delle ruote coniche o ad angolo, siccome la epicicloide piana si applica alla forma dei denti delle ruote piane (§ 368). Quando tratteremo nelle future lezioni di *Chinematica* della costruzione delle ruote dentate tornerà più a proposito lo sviluppare queste curve sferiche, delle quali qui basterà il breve cenno che abbiamo dato.

**DELLA SINUSOIDE, DELLA CONCOIDE  
E DELLE CURVE DI ESTRADOSSO.**

**LEZIONE DECIMANONA.**

*Definizioni e costruzione geometrica della Sinusoide. — Costruzione meccanica, tangenti e applicazione della Sinusoide. — Generazione e definizioni della Concoide. — Descrizione e applicazione della Concoide. — Nozioni fondamentali delle Curve di Estradosso. — Descrizione delle Curve di Estradosso.*

**Sinusoide.**

**Definizioni e costruzione geometrica della sinusoide.** — 377. Una curva piana .....*aAbBcCdD*..... (fig. 246), la quale serpeggia a traverso di una linea retta *YY'* allontanandosi ora dal lato destro ora dal sinistro sempre ugualmente, ed in modo tale

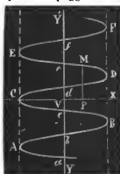


Fig 246.

che le porzioni curvilinee successive .....*aAb, bBc, cCd, dDe*..... sieno tutte uguali fra loro ed oppostamente situatè, e che le porzioni rettilinee..... *ab, bc, cd, de*..... in cui resta divisa la *YY'* dai punti d' intersezione..... *a, b, c, d*... sieno pure tutte uguali fra loro, si chiama *sinusoide* o *curva dei seni*.<sup>1</sup> Poichè non vi sono ostacoli che impediscano di prolungare anco infinitamente l'andamento curvilineo indicato, la

<sup>1</sup> La trigonometria chiama *seno* di un arco la perpendicolare abbassata da una sua estremità sul raggio che passa per l'altra estremità. Se la retta *YY'* si prende per asse delle ordinate, e per asse

sinusoide è una curva aperta, i di cui rami si estendono all'infinito da una parte e dall'altra.

378. La retta indefinita  $YY'$  sulla quale serpeggia la curva si chiama *asse della sinusoide*. Le rette  $AE$ ,  $BF$  parallele all'asse ed ugualmente distanti da esso di quanto la curva maggiormente si allontana ne sono i *limiti*. I punti  $\dots a, b, c, d, \dots$  ove la curva taglia l'asse ed inverte la sua curvatura sono altrettanti *punti d'inflessione* (§ 8). In

fine ciascuno dei segmenti uguali  $\dots ab, bc, cd, de, \dots$  intercetto fra due successivi punti di inflessione si dirà la *base* della sinusoide.

379. È semplice quanto è utile il processo geometrico per *descrivere una Sinusoide dati l'asse  $AY$  i limiti  $LL, L'L'$  e la base  $AB$*  (fig. 247). Con un raggio  $Oa$  uguale alla metà della distanza  $LL'$  dei limiti si descriva una circonferenza  $allbIXa$ , di cui il centro  $O$  sia situato sull'asse  $AY$  prolungato quanto occorre, e si divida in un certo numero di parti uguali, per esempio in 12, contrassegnando i punti di divisione con numeri progressivi a partire dal punto  $a$  dell'asse. È chiaro intanto che i limiti  $LL, L'L'$  saranno tangenti alla circonferenza descritta nei punti III e IX. Si divida la base  $AB$  in 6 parti

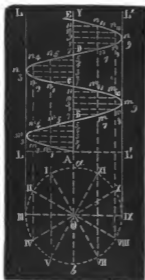


Fig. 247.

delle ascisse si prende una perpendicolare qualunque  $XC$ , la geometria analitica dimostra che ogni ordinata  $MP$  della curva è proporzionale all'arco che nel circolo di raggio 4 ha per seno  $\frac{VP}{VC}$ , cioè il rapporto della ascissa alla distanza maggiore che passa fra la curva e l'asse delle ordinate. Questa è la ragione che ha dato alla curva il nome di *sinusoide* o *curva dei seni*.

delle ascisse si prende una perpendicolare qualunque  $XC$ , la geometria analitica dimostra che ogni ordinata  $MP$  della curva è proporzionale all'arco che nel circolo di raggio 4 ha per seno  $\frac{VP}{VC}$ , cioè il rapporto della ascissa alla distanza maggiore che passa fra la curva e l'asse delle ordinate. Questa è la ragione che ha dato alla curva il nome di *sinusoide* o *curva dei seni*.



uguali, le quali si riporteranno da B in C, e si numerino progressivamente le 12 parti da A in C. Se ora dai punti di divisione 1, 2, 3, 4,..... 11 dell'asse si elevano le perpendicolari  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_{11}$ , e dai punti di divisione della circonferenza I, II, III, IV,..... XI si conducono altrettante parallele all'asse, la curva  $Am_3Bm_5C$  che si faccia passare pei punti A, B, C e per quelli di intersezione  $m_1, m_2, m_3, m_4, \dots, m_{11}$  delle perpendicolari colle parallele contrassegnate del medesimo numero è la senoide dimandata, la quale si comporrà di due archi  $Am_3B, Bm_5C$  uguali ed oppostamente situati. Volendo altri due archi si riporterà altre due volte la base AB da C in D e da D in E, e diviso ciascuno in altre sei parti uguali e numerate come sopra, si eleveranno dai punti di divisione altrettante perpendicolari, le quali incontreranno i prolungamenti delle rispettive parallele già condotte dai punti di divisione della circonferenza, e la curva  $Cn_2Dn_4E$  che si faccia passare pei punti C, D, E e pei nuovi punti  $n_1, n_2, n_3, n_4, \dots, n_{11}$  sarà formata di altri due archi  $Cn_2D, Dn_4E$  uguali ed opposti. Ripetendo successivamente la base AB sull'asse e seguendo ad operare nello stesso modo potremo prolungare la senoide quanto più piacerà. Quando le divisioni della base sono in numero pari ogni perpendicolare che viene ad elevarsi sulla metà di essa divide l'arco rispettivo insistente sulla base in due parti uguali e simmetriche; oltre di che la operazione diverrà assai più semplice, poichè basta di descrivere la metà della circonferenza col diametro perpendicolare all'asse, come appunto è il caso del numero delle divisioni che abbiamo adottato per esempio. Ma il processo essendo esposto in un modo generale scriverà, qualunque sia il numero delle divisioni del circolo ed il punto di loro partenza. Ora dal fin qui detto si rileva che la senoide ha tante infinite varietà quanti differenti rapporti si possono stabilire fra la semcirconferenza ausiliaria, ossia fra la distanza dei limiti e la base.

**Costruzione meccanica, tangenti e applicazioni della sinusoid.** — 380.

Nel disegno tecnologico si rende indispensabile il saper descrivere geometricamente la sinusoid come or ora vedremo. Ma al disegnatore, per quanto l'esercizio acquistato lo renda capace di ridurre la operazione esposta alla maggior semplicità, riesce tuttavia imbarazzante la molteplicità delle linee, e gli sarebbe utilissimo uno strumento o un processo meccanico qualunque, col quale potesse tracciare col rigor geometrico l'unico segno della sinusoid, siccome lo può delle curve che sono state precedentemente trattate. Ci sembra che corrisponda perfettamente a tale oggetto il seguente principio.

Si supponga un'asta *AB* scorrevole entro due anelli *a, a'* (*fig. 248*), alla quale sia unita invariabilmente a squadra una

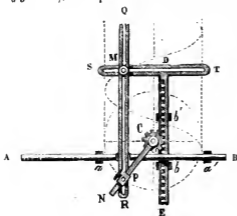


Fig. 248.

riga *RQ* e capace di muoversi secondo la sua lunghezza fra le guide *b, b'*, porti a squadra un'altra riga *ST* scanalata a giorno, ed incastri coi denti di un rocchetto fisso invariabilmente al regolo *CN* e concentrico all'asse *C*. Ora se si fa girare il regolo intorno al suo asse *C*, il perno *P* obbligherà la riga *RQ* a muoversi sempre parallelamente a se stessa, ed il rocchetto trasmettendo il movimento all'asta *DE* farà sì che la riga *ST* si

giri un giro. Intorno poi ad un centro *C* fisso rispetto agli anelli *a, a'* giri un regolo *CN*, ed un perno *P* da fissarsi a piacere sul medesimo scorra lungo il canale della riga *RQ*. Si supponga inoltre che una seconda asta dentata *DE* parallela alla ri-

manterrà sempre perpendicolare alla riga RQ; ma è chiaro allora che ad ogni giro del regolo CN o del rocchetto l'asta DE percorre il medesimo spazio, cioè il pernio P descrive archi proporzionali alle quantità di cui si avvanza contemporaneamente la riga ST (§ 379); dunque un lapis M obbligato a scorrere nello stesso tempo nei canali di ambedue le righe descriverà la sinusoidale, della quale la base sarà uguale alla lunghezza sviluppata della circonferenza del rocchetto, l'asse passerà pel centro C del rocchetto e sarà parallelo alla riga RQ, e la distanza dei limiti uguaglierà il doppio della distanza PC del pernio P dal centro C.

Sopprimendo il rocchetto, l'asta DE e la riga ST, si potrebbe supporre che girando il regolo CN si avanzasse proporzionalmente il centro C unitamente agli anelli  $a, a'$  col mezzo di un meccanismo qualunque, ed allora il lapis M fissato in un punto qualunque della riga RQ descriverebbe per le stesse ragioni la medesima sinusoidale.



Fig. 249.

Con questi principii sarà facile adunque il costruire uno strumento proprio a disegnare una sinusoidale qualunque secondo il diametro che si darà al rocchetto, e secondo la posizione del pernio P sul regolo CN.

384. *Condurre una tangente ed una normale alla sinusoidale ABCDE... da un punto M preso sulla curva (fig. 249). Facendo centro comune sull'asse EO si descriva una*

circonferenza  $ada'b$  col diametro uguale alla distanza dei limiti  $Bb, Dd$ , e da uno dei punti d'inflessione A e C più prossimi ad M, per esempio da A, si conduca ST perpendicolare all'asse, e dipoi dal punto M si tiri parallelamente all'asse la secante Mm alla cir-

conferenza. Ora se il punto d'inflessione  $A$  è fra i due il più lontano da  $M$ , nel punto d'intersezione  $m$  più lontano di  $m'$  da  $M$  si conduca  $mt$  tangente alla circonferenza  $ada'b$ , e vi si prenda  $mt$  uguale in lunghezza all'arco circolare  $abm$ . Dall'estremità  $t$  si abbassi sopra  $ST$  la perpendicolare  $tT$ , e si unisca il piede  $T$  col punto dato  $M$ . La retta  $MT$  sarà la tangente richiesta nel punto dato  $M$ . Per aver la normale non si farà che elevare sulla tangente pel medesimo punto  $M$  la perpendicolare  $Nn$ .

Se il punto dato  $M$  è situato in un arco  $CDE$  della sinusoide opposto al primo  $ABC$  (§ 377), seguiremo la stessa regola; se non che la lunghezza dell'arco circolare dovrà prendersi invece fra il punto di intersezione  $m$  e l'estremità  $a'$  del diametro opposta ad  $a$ . Ed è chiaro che quando il dato punto è un vertice  $B$  dell'arco di sinusoide, la tangente si converte nel limite  $Bb$  della curva, e la normale nella distanza dei limiti della medesima.

È da osservarsi che ogni tangente della sinusoide, eccettuate quelle dei vertici degli archi, taglia sempre questa curva in qualche punto. Quelle poi condotte ai punti di inflessione la tagliano nello stesso punto di contatto in modo che ognuna, dopo esser stata da una parte, passa dall'altra della curva. Tutto ciò deve accadere, imperocchè la curvatura di un arco di sinusoide è volta in un senso mentre quella dell'arco successivamente opposto è volta in senso contrario, e la tangente è sempre applicata contro la convessità di una curva.

382. La sinusoide, sebbene non sia fra le curve suscettibili di una estesa applicazione, può per la sua forma regolare e per le sue numerose varietà venire impiegata nelle arti ornative; così negli intagli, nelle cancellate, nelle ringhiere come nelle decorazioni la forma della sinusoide può riuscire convenientissima, e lo stesso pittore decoratore può trarne un buon partito. Ma una vera utilità ne trarrà il disegnatore, o per meglio dire, la sinusoide è indispensabile al disegno geometrico per

rappresentare forme speciali di alcuni corpi. Sarebbe impossibile di fare il disegno geometrico di una vite senza saper costruire una senoide: imperocchè questa curva, come insegna la Geometria descrittiva, è la esatta proiezione verticale dello spigolo dei pani di una vite.

### Concoide.

#### Generazione e definizioni della concoide. — 383.

Due punti  $M, m$  (fig. 250), d'intersezione continua di una retta mobile  $MP$  che gira intorno ad un punto fisso  $P$  e di un circolo  $MTm$ , di cui il centro  $C$  striscia lungo una retta fissa  $ST$ , ed in

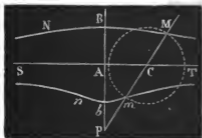


Fig. 250.

modo che questo medesimo centro rimanga sempre contemporaneamente sulla retta mobile  $MP$ , generano o descrivono una curva  $MN, mn$ , la quale si chiama *Concoide*.<sup>1</sup>

384. Il punto fisso  $P$  si chiama *il polo*, la retta fissa

$ST$  si dice la *direttrice*; il circolo  $MTm$  si chiamerà *circolo regolatore*, e la perpendicolare abbassata sulla direttrice dal polo  $P$  sarà l'*asse* della concoide. Dalla generazione di questa curva ne segue che la concoide è distinta in due rami simmetrici intorno all'asse che si estendono all'infinito. Ed è chiaro che i punti  $M, m$  allontanandosi continuamente dal polo  $P$  si avvicineranno sempre più alla direttrice senza toccarla giammai, e perciò la direttrice è l'asintoto della concoide (§§ 104, 248).

Il ramo  $mbn$  generato dal punto d'intersezione  $m$  situato

<sup>1</sup> La concoide fu proposta per la prima volta da Nicomede geometra greco, il quale le dette questo nome per esprimere la forma della conchiglia a cui è rassomigliante.

dalla parte della direttrice ove si trova il polo si chiama più specialmente *concoide inferiore*, e quello MBN generato dal punto M situato dalla parte opposta si dice *concoide superiore*. Qui non parleremo della concoide inferiore poichè essa non dà luogo che alle considerazioni del Geometra. <sup>1</sup>

**Descrizione e applicazione della concoide.** — 385.

*Descrivere la Concoide, dati la direttrice ST, il polo P, ed il raggio AB del circolo regolatore (fig. 251).* Da una parte e dall'altra dell'asse PB condotto

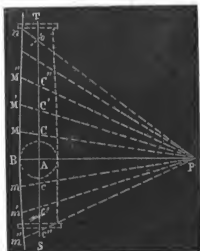


Fig. 251.

tra dell'asse PB condotto pel polo P si prendano sulla direttrice quanti punti vogliono C, C', C'', C''', ec. e c, c', c'', c''' ec. a qualunque distanza fra loro, e per essi e pel polo si facciano passare le rette PM, PM', PM'', PM''', ec. Pm, Pm', Pm'', Pm''', ec. Se sopra ciascuna di queste rette a partire dalla direttrici si riporta il raggio AB, determineremo i punti M, M', M'', M''' ec. ed m, m', m'', m''' ec. i quali apparterranno alla

concoide richiesta, e non resterà che unirli con una linea continua.

<sup>1</sup> Se al circolo si sostituisce una curva qualunque, ed al centro di esso un punto fisso preso sull'asse della medesima, potrebbero generarsi infinite concoide differenti. Così se la curva fosse una ellisse, una parabola, ec. si otterrebbe la concoide ellittica, parabolica, ec. Nella concoide inferiore se  $mC$  è maggiore di  $AP$  (fig. 250), la curva formerà un fiocco annodato in P, cioè avrà un nodo o punto doppio nel punto fisso, e per ciò si chiama *concoide annodata*. Se  $mC$  è uguale ad  $AP$ , la curva avrà unicamente una cuspide o un punto di regresso nello stesso polo P.

386. Dai medesimi principii dipende la costruzione meccanica della concoide. Lo stromento di cui lo stesso Nicomede inventore di questa curva si è servito per descriverla con un movimento continuo è disposto nel seguente modo. Sopra un regolo AC (*fig. 252*), unito invariabilmente a squadra con una

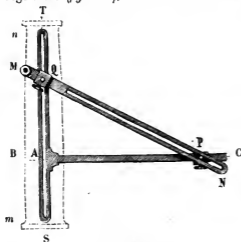


Fig. 252.

della riga ST mentre i lati interni del canale di questa riga strisciano sul pernio P, la riga stessa gira intorno a P, ed è chiaro che il lapis M descriverà con movimento continuo la concoide superiore  $mBMa$  di cui il pernio P è il polo, e la distanza MQ è il raggio del circolo regolatore. Quando il pernio Q possa fissarsi sopra MN ad una distanza da M a piacere come il pernio P si può fissare sopra AC, lo stromento sarà capace di descrivere una concoide superiore qualunque.

387. La concoide non è generalmente applicabile in alcuno uso delle arti, se si eccettua l'architettura. Gli architetti sogliono dare alle colonne una forma conica, la quale diminuisce dal basso all'alto, e di cui la generatrice è una curva. Non è questo il luogo di discutere quale sia la curva più conveniente alla forma delle colonne rispetto alle condizioni di solidità: so-

lamente accenneremo che la concoide è qualche volta impiegata per ottenere il profilo di questa diminuzione, che dicesi *affusatura* o *rastremazione*. Or bene in tal caso il raggio AB della colonna (figg. 251, 252), considerato ai due terzi dalla base superiore, si prende per raggio del circolo regolatore, e da questa altezza si conduce una orizzontale BP: poi fatto centro in un punto *n* (fig. 251), che determina la rastremazione della colonna, con un raggio uguale ad AB si descriva un arco, che tagli l'asse della colonna in *o*; e finalmente la retta *nP* che si farà passare pei punti *n*, *o* taglierà l'orizzontale BP nel punto P, che sarà il polo della curva, per cui rimane con questi elementi a descrivere la curva nei modi insegnati (§§ 385, 386) che sarà la generatrice della superficie della colonna.

### Curve di estradosso.

**Definizione e principi fondamentali.** — 388. Con la esposizione della concoide noi avremmo terminato lo studio delle curve piane che ci cravamo prefissi di trattare, e che abbiamo creduto potessero avere nelle Arti e nei Mestieri e negli usi della vita una utilità più o meno estesa; ma ci sembra debba riuscire di qualche interesse il far conoscere in aggiunta una famiglia di curve, che sono di esclusivo dominio della statica degli edifizii. Nell'arte di fabbricare si chiamano in generale *curve di estradosso* tutte le diverse curve, colle quali si può generare le superficie convesse o esterne delle volte, siccome sono chiamate *curve di intradosso* quelle che generano le superficie concave o interne delle medesime.

389. I diversi Geometri che si sono occupati di studiare il modo, col quale i cunei di una volta agiscono per sostenersi a vicenda, hanno dimostrato che nella supposizione che nulla si opponga alla loro azione, bisogna affinchè una volta si sostenga



in equilibrio stabile che i numeri rappresentanti i pesi dei cunei stiano fra loro come quelli rappresentanti la differenza delle tangenti trigonometriche degli angoli <sup>1</sup> formati dai piani di loro contatto con quello verticale condotto per la sommità.<sup>2</sup> Questa condizione ci somministra il mezzo facile di procurare alle volte la maggiore solidità, e a tale effetto esige che la grossezza della volta vada variando dalle imposte verso la chiave o la sommità. Or bene, è agevole il comprendere che la generatrice della superficie convessa della volta, ossia la curva di estradosso, non può in generale esser giammai della medesima natura della generatrice della superficie concava, ossia della curva di intradosso. Le curve di estradosso, oltre a differire dalle rispettive, curve di intradosso, sono di natura affatto particolare, e variano col variare di queste. Esponiamo adunque brevemente i processi, per mezzo dei quali si può determinare le curve di estradosso, scelte che sieno dall'architetto le curve di intradosso delle volte almeno le più usitate.

390. La determinazione della curva di estradosso di una volta pel principio meccanico stabilito (§ 389), si riduce alla ricerca delle tangenti trigonometriche degli angoli formati da ciascun piano di contatto dei cunei col piano verticale che passa per la generatrice rettilinea più elevata della superficie di intradosso. La operazione però sarà inutile che venga estesa a tutti i contatti dei cunei, e si limiterà unicamente alla porzione di *curva di estradosso* compresa fra il prolungamento dei piedritti, perchè la grossezza della volta al di là di questi limiti è compresa nelle dimensioni dei piedritti medesimi. Spieghiamoci meglio coi seguenti esempi.

<sup>1</sup> Si chiama tangente trigonometrica di un angolo la lunghezza della tangente condotta ad una estremità dell'arco circolare che lo misura, e determinata dall'incontro del prolungamento del raggio che passa per l'altra estremità.

<sup>2</sup> RONDELET. *Art de bâtir*. Troisième section.

**Descrizione delle curve di estradosso.** — 394. *Data la curva di intradosso*  $ABa$  di una volta circolare a tutto sesto, *descrivere la curva di estradosso* (fig. 253). Dopo aver divisa in parti simmetriche intorno alla saetta  $CB$  la semicirconferenza  $ABa$  dell'intradosso, le normali ossia le linee di commesso  $n's'$ ,  $n''s''$ ,  $n''s'''$ , ec. dei cunei condotte pei punti di divisione  $n'$ ,  $n''$ ,



Fig. 253.

$n'''$ , ec. prolungate concorreranno tutte nel centro  $C$ . La metà della grossezza  $MB$  della volta prestabilita alla sommità si riporti sopra una metà della corda  $Aa$  dal centro  $C$  in  $g$ , e dal punto  $g$  si elevi la perpendicolare  $g1$  finchè incontra in  $1$  il raggio  $Cn'$  più prossimo alla saetta  $CB$ . Dal punto  $1$  condotta finalmente  $OP$  parallela alla corda, i raggi verranno tagliati nei punti  $1, 2, 3$ , ec., ed i segmenti  $O1, O2, O3$ , ec. così determinati saranno le tangenti degli angoli  $BCn', BCn'', BCn'''$  ec. che si richiedono; <sup>1</sup> ma abbiamo posto che le differenze delle tangenti sono proporzionali ai pesi dei cunei (389); dunque se si riportano le differenze loro  $O1, 1.2, 2.3$ , ec. rispettivamente sulle normali dell'intradosso corrispondenti alle metà dei cunei da  $B, U', U''$ , ec. in  $M, n', n''$  ec. e si opera nello stesso modo per l'altra metà della volta, la linea  $dMD$  che si faccia passare pei punti  $M, n', n''$  ec. e tutti gli altri così determinati sarà la curva di estradosso richiesta. Se si trattasse di una volta circolare a sesto scemo si cercherà prima di tutto il centro dell'intradosso, e dipoi applicheremo il medesimo processo.

<sup>1</sup> Se col raggio  $CO$  si descrive l'arco di cerchio  $OR$ , la retta  $OP$  sarà tangente nel punto  $O$ , e perciò le porzioni  $O1, O2, O3$ , ec. secondo la nota 1 del § 390, saranno le tangenti trigonometriche degli archi  $O1, O11, O111$ , ec. ossia degli angoli  $BCn', BCn'', BCn'''$ , ec.

392. Si può descrivere la curva di estradosso di tutte le volte circolari in un modo assai più semplice, che produce presso a poco lo stesso effetto. Determinata la grossezza  $BM$  (fig. 253) nel punto di mezzo  $B$  della chiave della volta, si riporterà la metà del raggio dell'arco circolare tre volte da  $B$  in  $Q$ , e dal punto  $Q$  come centro col raggio  $QM$  si descriverà l'arco  $dMD$  finchè incontri i prolungamenti  $ad$ ,  $AD$  delle linee interne dei piedritti. Quest'arco di cerchio forma la curva di estradosso, che poco differisce da quella descritta col metodo precedente delle tangenti (§ 391), ma che è sufficiente nella ordinaria pratica di fabbricare.

393. *Data la curva di intradosso  $aBA$  di una volta gotica circolare descrivere la curva di estradosso* (fig. 254). La curva



Fig. 254.

di intradosso di una simil volta essendo composta di due archi di cerchio  $aB$ ,  $AB$  che hanno i loro centri  $a$ ,  $A$  sulla corda e formano un angolo curvilineo alla sommità, la curva di estradosso sarà formata pure di due curve uguali e simmetriche, che si taglieranno sul prolungamento della linea di mezzo  $BC$ . Per ottenere una di queste curve si conducano, per esempio da  $a$ , i raggi  $aB$ ,  $an'$ ,  $an''$ , ec. e si riporti la metà della grossezza determinata alla sommità da  $a$  in  $g$ , e per  $g$  si meni la  $g1$  parallela ad  $AB$ , e pel punto d'incontro  $1$  si tiri  $OP$  parallela ad  $aA$ . Le porzioni  $O1$ ,  $1.2$ ,  $2.3$ , ec. sono le differenze delle tangenti (391 e nota 1), le quali riportate sul prolungamento dei raggi di mezzo da  $B$ ,  $b'$ ,  $b''$  ec in  $M$ ,  $m'$ ,  $m''$  ec. avremo altrettanti punti che apparterranno alla curva di estradosso  $MD$ . Per l'altra curva  $Md$  si opererà in un modo analogo ma contrariamente. Anco in questo caso se si prolunga il raggio  $Ba$  e si riporta

la sua metà da  $a$  in  $Q$  (§ 392) si descriverà col centro in  $Q$  e col raggio  $QM$  l'arco di cerchio  $MD$ , il quale potrà prendersi per rappresentare senza sensibilissimo errore la curva d'estradosso.

394. *Data la curva di intradosso  $aBA$  di una intera volta ellittica a sesto scemo (fig. 255), o rialzato (fig. 256), descrivere*



Fig. 255.

la curva di estradosso. Condotte le normali  $n's'$ ,  $n''s''$ ,  $n''s'''$ , alla curva di intradosso dai diversi punti di divisione  $n'$ ,  $n''$ ,  $n'''$  ec. siccome abbiamo fatto precedentemente, si riporti sulla corda  $Aa$  la metà della grossezza che si vuol dare alla chiave dal centro  $C$  in  $1$ , e da  $1$  si

tiri  $O1$  parallela alla direzione  $n's'$ , che incontrerà il prolungamento dell'asse  $BC$  in  $O$ . Se da  $O$  conduciamo le  $O2$ ,  $O3$ , ec. parallele rispettivamente alle direzioni  $n''s''$ ,  $n''s'''$  ec. i segmenti  $C1$ ,  $C2$ ,  $C3$  ec. saranno le differenze delle tangenti, e perciò riportati sulle medie normali  $BM$ ,  $1'm'$ ,  $1''m''$ , ec. daranno i punti  $M$ ,  $m'$ ,  $m''$ , ec. pei quali non resterà che far passare la curva di estradosso  $dMD$ . Anco nelle volte ellittiche si potrà come nelle circolari ottenere la curva di estradosso sostituendo un arco di cerchio alla curva determinata per punti. Stabilita la grossezza  $BM$  alla chiave, si cerchi la lunghezza media del raggio di curvatura dell'intradosso nella sommità (§§ 20, 21), e la sua metà, e si riporti tre volte da  $B$  in  $Q$ , e quindi dal centro  $Q$  col raggio  $QM$  si descri-



Fig. 256.

la curva di estradosso. Condotte le normali  $n's'$ ,  $n''s''$ ,  $n''s'''$ , alla curva di intradosso dai diversi punti di divisione  $n'$ ,  $n''$ ,  $n'''$  ec. siccome abbiamo fatto precedentemente, si riporti sulla corda  $Aa$  la metà della grossezza che si vuol dare alla chiave dal centro  $C$  in  $1$ , e da  $1$  si

verà l'arco  $dMD$ , che in pratica sarà sufficientemente esatto per rappresentare la curva di estradosso, che dia alla volta la necessaria solidità.

395. Le operazioni che abbiamo insegnate cogli esempi precedenti indicano bastantemente il processo generale che bisogna seguire per descrivere la curva di estradosso di una volta di cui l'intradosso è una curva qualunque.<sup>1</sup> In un tal procedere si richiede però di determinare prima di tutto le normali alla curva d'intradosso, e perciò è d'uopo che il costruttore o il disegnatore sappia condurre speditamente le normali, in specie a quelle curve che vengono impiegate nella costruzione delle volte secondo le regole che abbiamo particolarmente insegnate per ciascuna. In generale le volte riescono estradosstate in modo che la loro grossezza va diminuendo dal basso all'alto, cioè dai piedritti verso la chiave (§ 389). Però le volte centinate secondo la catenaria, e quelle secondo la parabola soffrono eccezione.



Fig. 257.

396. Quando la curva di intradosso  $aBA$  è una catenaria (fig. 257), la volta conserva dappertutto la medesima grossezza; cioè la curva di estradosso  $dMD$  è ugualmente distante dalla catenaria. Infatti determinate graficamente le tangenti siccome facemmo per le volte circolari ed ellittiche (§§ 391, 393, 394), è notevole osservare che le loro differenze  $C1$ ,  $1.2$ ,  $2.3$ , ec. sono tutte uguali, e quindi uguali divengono le lunghezze  $BM$ ,  $B'n'$ ,  $B''m''$ , ec.

Infatti determinate graficamente le tangenti siccome facemmo per le volte circolari ed ellittiche (§§ 391, 393, 394), è notevole osservare che le loro differenze  $C1$ ,  $1.2$ ,  $2.3$ , ec. sono tutte uguali, e quindi uguali divengono le lunghezze  $BM$ ,  $B'n'$ ,  $B''m''$ , ec.

<sup>1</sup> Si potrebbe giungere anche col calcolo e con maggiore esattezza a stabilire la lunghezza delle tangenti servendosi delle tavole dei seni e delle tangenti. Ma non fa bisogno che questo metodo venga indicato a coloro che conoscono la Trigonometria, e sanno trarne un utile sussidio.

delle medie normali. Questo risultato concorda colla proprietà che hanno i corpi eguali di forma e di peso collocati uno accanto all'altro secondo una catenaria di sostenersi nell'aria per solo effetto dei loro contatti (§§ 285, 286), e perciò dimostra evidentemente l'esattezza del processo che abbiamo indicato, e permette, allorchè si fa uso della catenaria nella costruzione delle volte, di dare alle medesime assai minor grossezza.

397. Se la curva di intradosso è una parabola la volta presenta un effetto contrario, cioè la grossezza va crescendo dai



Fig. 258.

piedritti verso la chiave. Eseguendo la costruzione solita sopra la parabola  $aBA$  (fig. 258), si troverebbe che le differenze delle tangenti  $C1$ ,  $1.2$ ,  $2.3$ , ec. vanno continuamente decrescendo e perciò le grossezze medie  $BM$ ,  $b'm'$ ,  $b''m''$ , ec. dovranno crescere

andando dai piedritti verso la chiave, e così la grossezza di una volta parabolica sarà massima alla chiave. Ciò appunto si trova giustificato dai precetti della statica, la quale stabilisce appunto che una volta per sostenere un gran peso debba essere parabolica, e avere la grossezza maggiore alla chiave che ai piedritti.

## DELLE ELICHE.

### LEZIONE VENTESIMA.

*Nozioni generali ed esempi. — Generazione e descrizione geometrica dell'Elica cilindrica. — Descrizione meccanica dell'Elica cilindrica regolare e irregolare. — Superficie, applicazioni e misura dell'Elica cilindrica. — Generazione e descrizione dell'Elica conica.*

**Nozioni generali ed esempi.** — 398. Nella lezione precedente avendo posto termine allo studio delle curve piane le più utili, e maggiormente applicabili, ci resterebbe per compiere il corso geometrico sulle curve di far quello delle *curve a doppia curvatura*, cioè di quelle curve di cui tutti i punti non sono situati in un medesimo piano (§ 4). Le curve a doppia curvatura non sono generalmente applicabili nelle arti, e per poterle rappresentare si richiede necessariamente l'impiego del metodo delle proiezioni, perciò il loro studio essendo più competente alla geometria descrittiva, rimandiamo chi fosse vago di intraprenderlo a trattati speciali di disegno geometrico e industriale. Le curve a doppia curvatura suscettibili veramente di utile applicazione sono pochissime, fra le quali giova distinguere quelle chiamate *Eliche* o *Spirali rampanti*. Pertanto qui ci occuperemo appunto brevemente di queste curve in vista della loro estesa applicazione e dell'uso continuo che se ne fa, e perchè le loro proiezioni sono di facilissima costruzione.

399. Se si suppone che un punto giri attorno una linea retta mentre si avvanza con qualsivoglia legge in una direzione

che faccia con la medesima un angolo qualunque costante o variabile, genera la curva che si chiama *Elica o Spirale rampante*. Se i movimenti o gli spazi percorsi dal punto nei due sensi conservano sempre il medesimo rapporto fra loro, la curva si dice *Elica regolare*. La linea intorno alla quale succedono i movimenti è l'asse dell'elica. La porzione di curva corrispondente ad un intero giro chiamasi *giro dell'elica*, o *spira*. La distanza che separa le due estremità di una spira è detta *passo dell'elica*. In fine se il punto generatore si mantiene alla stessa distanza dall'asse la curva è situata sopra la superficie di un cilindro circolare, e perciò si chiama *elica cilindrica*. La circonferenza descritta con quella distanza è la *base dell'elica cilindrica*. Se il punto generatore si avvicina o si allontana proporzionalmente dall'asse la curva vien descritta sulla superficie di un cono circolare, e si dice *elica conica*.

400. La natura offre molti esempi nei loro prodotti di eliche. Alcune piante, come sono i convolvoli, i vilucchi, le viti stesse e tutte le rampanti si innalzano aggrappandosi ed avvolgendosi intorno al tronco di un albero, ad un arbusto o ad un palo, formando delle eliche più o meno regolari. L'organismo di alcune piante, le conchiglie, le corna degli animali non presentano molteplici esempi di forme elicoidali? Le scienze e le arti studiando l'indole e le proprietà di quelle forme naturali le hanno introdotte nei prodotti artificiali. I tiratappi, i succhielli, i cavastracci, la fusoida degli orologi, le canne dei fucili a tortiglione, il serpentino del chimico, la cocea di Archimede per elevar l'acqua, le viti, le molle, i ricci di capelli, le corde, le funi, le scale a chiocciola ec. sono oggetti tutti foggiate dalle arti sotto forma di un'elica più o meno regolare.

#### **Elica cilindrica.**

**Generazione e descrizione geometrica.** — 401 Si supponga di avere intagliato un foglio di carta secondo un trian-



golo rettangolo ABC (fig. 259), il quale abbia un cateto o altezza AB uguale all'altezza  $ab$  di un cilindro retto  $ABba$  a base circolare. Se si applica il cateto AB sopra una generatrice retta del cilindro, e si avviluppa tutto il foglio di carta sulla super-

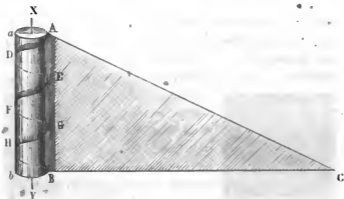


Fig. 259.

ficie cilindrica tante volte quante lo permette la lunghezza dell'altro cateto BC, la ipotenusa del triangolo, ossia il lembo inclinato del foglio, si disporrà seguendo una linea curva ADEFGHB che già chiamammo *elica cilindrica* (§ 399).

L'asse XY e la circonferenza della base del cilindro sono l'*asse* e la *base* dell'elica. Da questo modo di generazione manifesta-mente apparisce che la curva è inclinata ugualmente in tutti i suoi punti, vale a dire che ogni tangente condotta da un punto qualunque fa sempre il medesimo angolo uguale a quello ACB del triangolo generatore, e quindi ha costante il passo, <sup>1</sup> e perciò è un'elica regolare.

<sup>1</sup> Nell'elica cilindrica il passo è la porzione di una generatrice del cilindro intercetta da due spire consecutive; ed è costantemente la medesima perchè corrisponde all'altezza del triangolo rettangolo che avrà per base la lunghezza della circonferenza della base del cilindro.

402. *Dati il passo PQ e la base P $\alpha$ B descrivere l'elica cilindrica regolare (fig. 260).* In questa costruzione non si tratta che di eseguire sopra la superficie di un cilindro le medesime operazioni che facemmo sopra un piano per descrivere la sinusoidale (§ 379). Infatti si divida la circonferenza P $\alpha$ B della base del cilindro in un numero di parti uguali, per esempio in 8, e si notino i punti di divisione coi numeri progressivi 1, 2, 3, 4...P; e per questi punti si conducano altrettante generatrici rette della superficie cilindrica. Sopra una di esse si riporti, a partire dalla base, il passo PQ; che si dividerà pure in 8 parti, e in ciascun punto di divisione si faccia una sezione sulla superficie cilindrica parallela alla base.

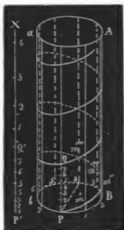


Fig. 260.

La linea P $n'$ n''n'''...Q che si farà passare per i punti P e Q e per quelli d'intersezione  $n'$ ,  $n''$ ,  $n'''$  ec. delle sezioni colle generatrici contrassegnate del numero corrispondente sarà una intera spirale dell'elica richiesta.

Ripetendo il passo sulla medesima generatrice successivamente una seconda, una terza, una quarta volta ec. ed operando in un modo analogo, otterremo una seconda, una terza, una quarta spirale ec. dell'elica, ciascuna delle quali avrà per origine il punto ove termina la precedente.

403. Si può risparmiare la descrizione delle sezioni circolari, e giungere allo stesso intento con maggior semplicità. Così se a partire dalla base si riporta l'ottava parte del passo su ciascuna generatrice tante volte quante ne sono indicate dal rispettivo numero, rimarranno ugualmente determinati i punti per i quali si farà passare la prima spirale, e quindi per ottenere la seconda, la terza, la quarta ec. basterà riportare successiva-

mente l'intero passo PQ sulle medesime generatrici a partire dai punti precedentemente determinati (§ 401 e nota 1). La costruzione di una elica sulle pareti interne di un cilindro si eseguirà negli stessi modi purchè la grandezza del diametro permetta di operare internamente.

404. Nelle arti giova spesso volte di saper rappresentare sopra un piano un' elica cilindrica, ossia saper descrivere la sua proiezione. Alla Geometria descrittiva spetta lo studiare e stabilire i metodi che vi conducono, ma qui indicheremo unicamente il modo di ottenerla colle cognizioni acquistate. Dal principio fondamentale del metodo delle proiezioni che accennammo nelle nostre lezioni di Geometria elementare si comprende bastantemente che la proiezione orizzontale di un cilindro retto in posizione verticale è un circolo *aIXIIIa* (*fig. 264*), e la proiezione verticale è un rettangolo *LLL'L'* diviso per metà dalla proiezione *AY* dell'asse. Per conseguenza tutte le parallele alla proiezione *AY* dell'asse condotte dai punti di divisione della proiezione orizzontale saranno le

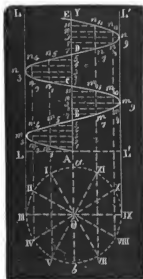


Fig. 261.

proiezioni verticali delle generatrici rette della superficie cilindrica corrispondenti ai medesimi punti di divisione; ma la descrizione della elica sulla superficie del cilindro è perfettamente identica a quella della sinusoide sopra un piano (§§ 379, 402); dunque si otterrà la proiezione verticale di un' elica cilindrica regolare descrivendo una sinusoide, la quale abbia la *base AB* uguale alla metà del passo dell' elica; e la distanza *LL'* dei limiti uguale al diametro della base dell' elica medesima.

405. È da osservarsi che nelle precedenti costruzioni geometriche dell'elica (§§ 402, 403) essendo indifferente il numerare i punti di divisione della base  $PBb$  (*fig.* 260) per un verso o per l'altro, si potranno descrivere sulla medesima superficie cilindrica due eliche aventi l'origine comune e lo stesso passo.<sup>1</sup> Queste due curve saranno uguali, ma le loro posizioni saranno differentemente disposte; l'una sale da destra a sinistra mentre l'altra sale da sinistra a destra; le loro spire corrispondenti hanno origine e termine nei medesimi punti, e si incrociano in un punto che le divide per metà ambedue. Nel primo caso l'elica si dice *sinistra* e nel secondo si dice *destra*.

**Costruzione meccanica dell'elica cilindrica regolare e irregolare.** — 406. Il modo di generazione dell'elica cilindrica esposto al § 401, è in sostanza un processo per costruirla meccanicamente. Quando però si voglia un numero grande di spire la curva risulta tracciata inesattamente, poichè per quanto sottile si prenda il foglio, nei ripetuti avvolgimenti il raggio del cilindro anderà ad ogni giro continuamente aumentando della grossezza del foglio dall'alto al basso, e perciò la elica non verrà rigorosamente descritta sulla superficie del cilindro, ed il passo anderà continuamente aumentando.

Per rimediare a ciò si prenda un rettangolo  $ABCD$  (*fig.* 262) formato di un foglio di carta, con la base  $BC$  uguale alla circonferenza sviluppata della base del cilindro, e che abbia l'altezza  $AB$  stessa del cilindro. Riportato sull'altezza  $AB$  il passo  $Am$  tante volte quante spire si richiedono, si conducano le  $mn$ ,  $m'n'$ ,  $m''n''$ , ec. parallele alla base  $BC$ , e quindi si tirino in ciascun rettangolo elementare le diagonali  $An$ ,  $m'n'$ ,  $m''n''$  ec. Se ora si involupa il rettangolo sul cilindro, ogni diagonale servirà a

<sup>1</sup> Nella figura 260 abbiamo indicato una sola elica per non confondere inutilmente colla molteplicità delle linee la intelligenza, che ci sembra d'altronde sufficientemente illuminata dal semplice enunciato della proposizione.

tracciare una spira, e siccome i lati AB, DC del rettangolo si riuniscono sulla stessa generatrice retta del cilindro, tutte le spire formeranno l'elica continua. Per tracciare l'elica contraria basterà condurre invece nei rettangoli elementari le diagonali opposte alle prime ed operare nel modo istesso.

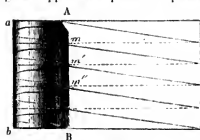


Fig. 262.

407. Ora facilmente si comprenderà la disposizione di una macchinetta per disegnare l'elica regolare di un dato passo sopra la superficie di un cilindro dato PQ (fig. 263). Il meccanismo principale

deve consistere in un supporto contenente la punta descrivente capace di camminare secondo una linea retta parallela all'asse del cilindro dato, mentre questo cilindro gira intorno al proprio asse. Molti sono i mezzi che la Meccanica può

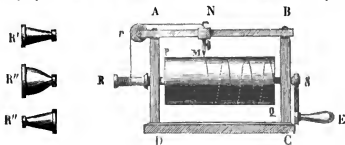


Fig. 263.

adoperare per combinare i due movimenti in modo da avere sempre lo stesso rapporto fra lo spazio percorso dal supporto e l'arco descritto nel medesimo tempo da un punto qualunque della superficie del cilindro.

Per esempio l'asse SR del cilindro PQ girevole nei lati verticali AD, BC di un telaio ABCD porti un rochetto R di

circonferenza uguale al passo dell'elica che si vuol tracciare; ed a questo rocchetto si attacchi un filo, il quale passando sulla rotella  $r$  vada coll'altro capo ad attaccarsi ad un corsoio  $N$  mobile lungo il lato superiore  $AB$  del telaio parallelo all'asse del cilindro. Se per mezzo di un manubrio  $E$  si fa girare il cilindro, il rocchetto  $R$  ad ogni giro raccoglierà una porzione di filo uguale alla propria circonferenza, e però un lapis  $M$  portato dal corsoio percorrerà una lunghezza uguale al passo, e segnerà sulla superficie del cilindro l'elica regolare. Se il cilindro si facesse girare in senso contrario, il filo verrebbe ad avvolgersi sul rocchetto  $R$  pure in senso contrario, e l'elica descritta sarebbe contraria alla prima.

408. I processi tanto geometrici che meccanici che abbiamo esposto servono pure a descrivere l'elica cilindrica, la quale abbia il passo crescente o decrescente secondo una data legge.

Infatti nella costruzione del § 402 divisa la circonferenza della base del cilindro (*fig. 260*), nello stesso numero di parti uguali, si prendano sopra una linea indefinita  $P'X$  i segmenti  $P'1, P'2, P'3, \dots, P'Q'$  che crescano secondo la legge voluta, se

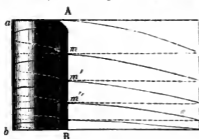


Fig. 264.

questi si riportano sulle generatrici notate del medesimo numero, determineremo i punti per cui deve passare la prima spira  $Pm'm''n'' \dots Q$ . Se si prosegue a prendere i segmenti crescenti colla medesima legge e si riportano sulle medesime generatrici collo stesso ordine, otterremo una seconda, una terza, una quarta spira ec.

409. Quando questa operazione si faccia nel rettangolo di carta  $ABCD$  (*fig. 264*), adoprato nella costruzione meccanica del § 406, invece delle diagonali  $An, mn', m'n''$  ec. dei ret-

tangoli elementari avremo altrettante curve, che volgeranno la concavità o convessità verso la base BC secondo che le altezze  $Am$ ,  $mm'$ ,  $m'm''$ , ec. resulteranno decrescenti o crescenti verso la medesima, e che avvolto che sia il rettangolo sul cilindro  $ABba$  formeranno l'intera elica con passo variabile. Se finalmente nella macchinetta descritta nel § 407 (*fig. 263*), al rochetto cilindrico  $R$  si sostituisce il rochetto conico divergente  $R'$ , il lapis  $M$  traccerebbe sulla superficie del cilindro  $PQ$  una elica di passo uniformemente decrescente, e viceversa se si sostituisce il rochetto conico convergente  $R''$ , l'elica avrebbe il passo uniformemente crescente.

Se poi il rochetto  $R'''$  da sostituirsi avesse un profilo curvilineo, il passo verrebbe pure a variare ma non uniformemente: così conoscendo la forma del rochetto potremmo conoscere qual sarà la curva descritta, e viceversa dalla curva descritta potremmo rilevare qual sia stata la forma del rochetto impiegato. <sup>1</sup>

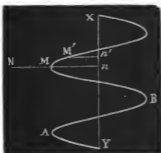


Fig. 265.

### Superficie, applicazioni

**e misura.** — 410. Si supponga adesso che una linea qualunque  $Nn$ , sia anco non retta, (*fig. 265*) si muova lungo l'elica  $AMBC$  toccandola sempre in un punto  $M$ , e conservando la medesima inclinazione coll'asse  $XY$ : la superficie continua da essa generata si chiama *superficie elicoideale* o *spirale*. <sup>2</sup> Per esempio la superficie costituita dagli sca-

<sup>1</sup> Ai principianti non sarà così agevole il risolvere queste questioni: imperocché sarebbe loro d'uopo di possedere delle cognizioni geometriche superiori, ed avere specialmente familiare la geometria descrittiva: perciò per ora si contenteranno di ritenerle per dimostrate.

<sup>2</sup> Nel corso delle Lezioni di geometria elementare parlando delle superficie a sghembo indicai specialmente questo genere di superficie,

lini di una scala detta volgarmente a chiocciola è una superficie elicoidale, della quale gli spigoli degli scalini rappresentano altrettante generatrici.

411. Fra i prodotti naturali e artificiali che abbiamo rammentati (§ 400) come esempi e applicazioni di linee e superficie elicoidali, merita di esser particolarmente distinto un organo meccanico tanto comune quanto utile ed importante generalmente, la *vite*. Se nella macchinetta della *fig. 263* invece del lapis si suppone un ferro tagliente, questo potrà intagliare nella solidità del cilindro un canale di cui la sezione sarà un quadrilatero *adb* (*fig. 266*), o un triangolo *bac* (*fig. 267*), o un'altra forma qualunque secondo quella che avrà il ferro. In questi



Fig. 266.



Fig. 267.

casi ne otterremo un solido che presenterà degli spigoli salienti e rientranti che saranno altrettante eliche cilindriche.

Quando parleremo della costruzione delle macchine tratteremo completamente la teorica geometrica e mecca-

nica di questo organo e le sue estesissime applicazioni, qui bastando averlo mostrato come una applicazione dell'elica.

412. Poichè un'elica si sviluppa secondo una linea retta (§§ 401, 403) o una linea curva (§ 409), se ne otterrà la lunghezza e quindi la sua misura, se si misureranno coi metodi insegnati (§§ 69 al 76), le linee che formeranno il suo sviluppo.

413. La superficie elicoidale poi non è suscettibile di esser misurata esattamente; ma se questa superficie si protrae da una

ma nè allora potremo, nè ora possiamo oltrepassare i limiti dell'elementarità, e gli studiosi lo troveranno sviluppato nei trattati speciali di Geometria descrittiva.



elica regolare o irregolare  $YAMBXCX$  all'asse  $XY$  del cilindro (*fig. 265*), avremo un risultato maggiormente approssimato moltiplicando per la retta generatrice  $Mn$  la semisomma dell'asse e dell'elica. Infatti la porzione di superficie  $MM'n'n$  intercetta fra due posizioni vicinissime  $Mn$ ,  $M'n'$  della generatrice può considerarsi senza sensibile errore un quadrilatero leggermente a sghembo, e può considerarsi questo come diviso in due triangoli rettangoli  $MM'n'$ ,  $Mnn'$  da una  $Mn'$  delle sue diagonali riguardate come rettilinee. Ora l'area del triangolo  $MM'n'$  è espressa da  $\frac{MM' \times M'n'}{2}$  e quella del triangolo  $Mnn'$  da  $\frac{nn' \times Mn}{2}$ , che

sommate daranno l'area  $MM'n'n = \frac{1}{2} (MM' + nn')Mn$ , cioè il quadrilatero elementare si misurerebbe moltiplicando per la generatrice la semisomma delle porzioni di elica e di asse intercette fra le due posizioni della generatrice. E finalmente sommando tutti i quadrilateri elementari in cui può supporre divisa la superficie elicoidale, otterremo la misura siccome appunto l'abbiamo enunciata.

Se la superficie elicoidale è racchiusa fra due eliche del medesimo passo, come quella di una scala a chiocciola praticata nell'interno di una parete circolare, si prenderà la differenza delle intere superficie elicoidali, ossia si moltiplicherà la semisomma delle due eliche per la porzione di generatrice compresa fra le medesime. La ricerca di tali misure è frequente nella ordinaria pratica delle arti? No; ma non sarà discaro agli studiosi l'averne appresa una idea.

### **Elica conica.**

**Generazione e descrizione.** — 414. Dal principio generale della generazione dell'elica chiaramente si comprende che l'elica conica in particolare è generata sulla superficie di

un cono retto circolare da un punto che gira intorno all'asse mentre striscia nel senso delle generatrici rettilinee avvicinandosi o allontanandosi dal vertice. Se ad ogni giro gli spazi percorsi sulle generatrici sono uguali, cioè il passo si mantenga sempre lo stesso, l'elica conica è *regolare*. Da qui i modi di descrivere e costruire l'elica conica perfettamente analoghi a quelli esposti per l'elica cilindrica.

415. Rispetto alla descrizione geometrica sulla superficie del cono AVB (fig. 268), si dividerà la circonferenza della base in parti uguali, e dai punti di divisione, P, 1, 2, ec. si condurranno altrettante generatrici al vertice, e quindi stabilito il passo PQ sulla generatrice PV corrispondente all'origine si determineranno, come per l'elica cilindrica regolare o irregolare (§§ 402, 408), i punti P,  $m'$ ,  $m''$ ,  $m'''$ ... Q nei quali deve passare la prima spira dell'elica conica regolare o irregolare, e dipoi si procederà ugualmente per la seconda, per la terza spira ec. <sup>1</sup>

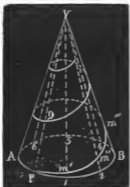


Fig. 268.

416. L'elica conica si costruisce per mezzo di un involuppo al pari dell'elica cilindrica (§ 406). Le superficie a semplice curvatura essendo esattamente sviluppabili (§ 14), noi sappiamo dalla Geometria elementare che lo sviluppo di un cono retto AVB (fig. 269), è un settore circolare BVD, che ha il raggio

uguale al lato VB del cono, e l'arco BD uguale alla lunghezza della circonferenza della base del medesimo Or bene; intagliato

<sup>1</sup> Per rappresentare sopra un piano l'elica conica, cioè per ottenere la proiezione verticale, si costruirà una curva colle medesime regole della sinusoidale, la quale abbia i limiti che si incontrino nel medesimo punto dell'asse, e facciano un angolo uguale all'angolo al vertice del cono.

un foglio di carta uguale al settore BVD, si divida l'arco BD in tante parti uguali, per esempio in 6, e dai punti di divisione 1, 2, 3.... ec. numerati progressivamente si conducano altrettanti raggi V1, V2, V3.... ec. Determinato il passo Vb, si divida

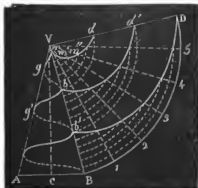


Fig. 269.

nel medesimo numero di parti uguali, e fatto centro in V si descrivano nei punti di divisione tanti archi concentrici all'arco BD, i quali incontreranno i raggi V1, V2, V3, ec. contrassegnati dello stesso numero nei punti  $m'$ ,  $m''$ ,  $m'''$ , ec. La curva  $Vm'm''...d$  che si farà passare per i punti V,  $m'$ ,  $m''$ ,..... $d$  rappresenterà lo

sviluppo della prima spira che ha l'origine nel vertice V. Riportando il passo Vb da b in  $b'$ , da  $b'$  in B e così successivamente quante volte lo contiene il lato del cono, e dividendo ognuno nel medesimo numero di parti, e conducendo i rispettivi archi concentrici, determineremo nello stesso modo i punti i quali apparterranno agli sviluppi  $bd'$ ,  $b'D$  ec. della seconda, della terza spira e se più ve ne fossero.<sup>1</sup> Inviluppando adunque il settore di carta BVD sul cono AVB, le curve  $Vd$ ,  $bd'$ ,  $b'D$  ec. si troveranno disposte sulla sua superficie in modo da formare una curva continua  $Vgb'g'....B$ , che sarà l'elica conica regolare. Per descrivere l'elica conica irregolare si prenderanno

<sup>1</sup> Queste operazioni colle quali abbiamo determinato gli sviluppi delle spire dell'elica conica essendo perfettamente identiche a quello che insegnammo per descrivere la spirale di Archimede (§ 318), gli sviluppi VB,  $bd'$ ,  $b'D$  ec. (fig. 269), sono altrettanti archi della spirale medesima avente il polo nel centro del settore. E ponendo i settori  $bVd$ ,  $b'Vd'$ , ec. a contatto uno dell'altro e col centro V in comune, quegli archi formeranno una intera spirale d'Archimede.

i passi  $Vb$ ,  $bU$ ,  $UB$  ec. che vadano crescendo o decrescendo e sieno divisi in parti crescenti o decrescenti secondo la voluta proporzionale, e poi opereremo nel modo istesso.

417. La medesima macchinetta di cui abbiamo data una idea al § 407 (*fig.* 263) per tracciare l'elica cilindrica, serve pure a disegnare l'elica conica. Sostituendo nella macchinetta al cilindro PQ un cono girevole parimente sul proprio asse, il lapis M per mantenersi a contatto della superficie conica e quindi disegnare l'elica dovrà continuamente abbassarsi o elevarsi secondo che si trasporterà verso il vertice o la base del cono; ed inoltre bisognerà costruire il rocchetto R che abbia la circonferenza uguale invece in lunghezza alla proiezione orizzontale del passo dell'elica conica. Ad evitare questi inconvenienti di costruzione tornerà meglio e più semplice il costruire il telaio ABCD in modo da poter disporre il lato AB sempre parallelo al lato del cono, ed allora la macchinetta traccierà l'elica conica come la cilindrica regolare o irregolare secondo che si adoprerà il rocchetto cilindrico o conico e curvilineo.

418. La breve considerazione che abbiamo fatta sulla generazione della superficie elicoidale cilindrica (§ 410), varrà pure per quella delle superficie elicoidali che hanno per direttrici delle eliche coniche.

E crediamo inutile l'annoverare le applicazioni particolari che si possono fare della elica conica dopo quanto abbiamo detto dell'elica cilindrica in generale (§§ 400, 411).

419. Finalmente non resterebbe a parlare che della misura lineare della elica conica e della area della superficie elicoidale che ha per direttrice un'elica conica; ma anco qui per la prima avremo ricorso ai metodi generali applicandoli sia direttamente sia al suo sviluppo (§§ 69 al 76, 412), e per la seconda procederemo siccome insegnammo per la superficie elicoidale cilindrica (§ 413). Dunque, poichè la generatrice va diminuendo dalla base al vertice del cono, *si misura la superficie elicoidale*

*conica intercetta fra l'asse e l'elica, moltiplicando per la media generatrice la semisomma dell'elica e dell'asse.*

420. Qui io pongo fine alla ultima lezione della *Geometria delle curve*. e con questa chiudo la parte geometrica del nostro *Corso industriale di Geometria e Meccanica*. Ciò non è il compimento dell'insegnamento geometrico che secondo il nostro programma <sup>1</sup> doveva esser preparatorio dello studio della Meccanica industriale; e rimarrebbe a studiare la Geometria descrittiva. Il pubblico avendo sott'occhio il risultato delle mie fatiche giudicherà dello impegno che aveva di giovare alle arti ed alla industria, ed io grato sempre a coloro che assisterono indefessamente alle mie Lezioni, ho lusinga che la loro indulgenza non mi sarà negata anco dai miei lettori.

<sup>1</sup> Faceva parte del programma d'insegnamento da me sostenuto nell'anno 1849-50 anco un corso di Geometria descrittiva e di disegno tecnologico, ma diverse circostanze impedirono che io gli dessi esecuzione.

FINE.



## NOTE AGGIUNTE.

## Nota I al § 22

La ricerca del raggio di curvatura corrispondente ad un dato punto di una curva non è il solo metodo generale per condurre una tangente e una normale alla medesima. Altri ve ne sono utili a conoscere nella pratica.

*Condurre una tangente ad una curva qualunque ...CBAMDEF.... da un punto dato M preso su di essa (fig. 270).*



Fig. 270.

la tangente MT nel punto M della curva si otterrebbe viceversa il punto T della curva ausiliaria riportando sulla tangente stessa la lunghezza Aa. Se la lunghezza arbitraria Aa si riporta invece in senso contrario sulle stesse corde determineremo i punti  $a', b', c', d', e', f'$ , pei quali si farò





intersezioni colla curva sieno talmente vicine da confondersi insieme, i due triangoli equilateri corrispondenti sono nulli ossia si riducono ad un punto che è quello di contatto.

Rispetto alla esattezza della costruzione nella pratica l'operatore terrà conto della avvertenza finale che abbiamo data nella nota precedente.

### Nota 3 al § 22.

*Condurre una tangente ad una curva qualunque ...AMBCD... parallelamente ad una retta data PQ (fig. 272), si scelgano sulla curva data diversi*

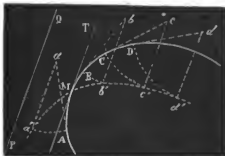


Fig. 272.

punti A, B, C, D, ec. in  $a, b, c, d$ , ec. e dai punti  $a, b, c, d$ , ec. si conducano le  $aa', bb', cc', dd'$ , ec. parallele alla data PQ ed uguali in lunghezza alla retta arbitraria Aa. La curva  $a'b'c'd'$ ... che si farà passare pei nuovi punti  $a', b', c', d'$ , ec. così determinati taglierà la curva data in un punto M che sarà quello di vero contatto; e però non resterà che condurre dal punto M una parallela a PQ per avere la tangente MT. Infatti facilmente si comprende che l'angolo formato da una tangente ausiliaria e dalla rispettiva parallela, per esempio l'angolo  $Aaa'$ , diminuendo se si va da A verso M, e poi crescendo quando oltrepassato il punto M si prosegue nello stesso verso da M in B, vi deve essere un istante in cui sarà nullo, vale a dire che la tangente ausiliaria Aa si confonderà colla parallela  $aa'$ . Quest'istante è quello in cui il punto  $a'$  della parallela corrispondente  $aa'$  cade in quello di contatto M, in quello cioè ove la curva ausiliaria  $a'b'c'd'$ ... che è il luogo geometrico del punto  $a'$  taglia la curva data ...AMBCD....

## Nota 4 al § 22.

Condurre una normale ad una curva qualunque PMQ da un punto dato N preso fuori di essa (fig. 273). Con quello fra i metodi che piacerà di

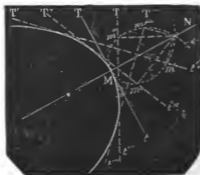


Fig. 273.

adottare all' operatore si conducano diverse tangenti  $T't'$ ,  $T''t''$ ,  $T'''t'''$ , ec. tanto da una parte quanto dall' altra della posizione presunta del punto ove la normale richiesta deve incontrare la data curva, e dal punto dato N si abbassino su ciascuna tangente le perpendicolari  $Nm'$ ,  $Nm''$ ,  $Nm'''$ , ec. Se per N e pei piedi  $m'$ ,  $m''$ ,  $m'''$ , ec. di queste perpendicolari si fa passare una curva continua  $Nmm'm''m'''N$ , essa toccherà la curva data in un punto M il quale sarà

il punto d' incontro di una tangente  $Tt$  condotta dallo stesso M e della sua corrispondente perpendicolare abbassata da N, poichè la curva ausiliaria  $Nm'm''m'''m''''N$  è il luogo geometrico di tutti gli incontri simili ossia dei piedi di tutte le perpendicolari. Dunque la retta NM che si farà passare pel punto dato N e pel contatto M sarà la normale ricercata.

In questa costruzione quando la curva data PMQ non abbia punti di inflessione, e volga la convessità al dato punto N la curva ausiliaria  $Nm'm''m'''m''''N$  viene a passare due volte pel medesimo, cioè N è un punto doppio; imperocchè dal punto N potendo condurre due tangenti alla curva data esso è nello stesso tempo il piede di ciascuna delle perpendicolari abbassate su queste due tangenti.

## Nota 5 al § 22.

*Metodo di Roberval.* Coloro che conoscono i principii elementari della Meccanica saranno più specialmente in grado di comprendere un metodo generale per condurre una tangente ad una curva da un punto preso sulla medesima, che Roberval ha dedotto dalla legge del movimento composto. Sappiamo che una curva può supporre generata da

un punto animato simultaneamente da due forze concorrenti. Or bene il movimento risultante considerato in un dato istante rispetto ad una posizione del punto generatore può esser rappresentato in grandezza e direzione dalla diagonale del parallelogrammo formato dalle rette che rappresentano in grandezza e direzione i due movimenti componenti; ma questa diagonale deve confondersi colla curva, e prolungata divenir tangente alla medesima in quella posizione: dunque si condurrà una tangente in un dato punto di una curva qualunque determinando la diagonale del parallelogrammo formato sulle direzioni dei due movimenti componenti e coi lati uguali agli spazi che sono o che potrebbero esser percorsi separatamente dal punto di contatto nel medesimo tempo in virtù della generazione della curva.

In atto pratico l'applicazione di questo metodo si riduce in generale a saper costruire geometricamente il parallelogrammo dei movimenti del punto generatore della curva corrispondente a quello dato di contatto, ed è appunto la regola che abbiamo data ai §§ 322, 329 per condurre una tangente alla spirale d' Archimede ed alla spirale iperbolica. A maggiore schiarimento del modo di applicare il metodo di Roberval aggiungeremo anco il seguente

*Esempio:* sia l'ellisse  $AMa$  la curva alla quale si vuol condurre la tangente nel punto  $M$  (fig. 274). Se si suppone che la ellisse sia descritta con un filo  $fM$  di cui i capi sieno fissati nei fuochi  $f, F$  (§ 204) è chiaro che nel movimento del punto generatore  $M$  la lunghezza del filo  $fM + MF$  rimanendo sempre la stessa la porzione  $fM$  si allunga della medesima quantità di cui si accorcia l'altra porzione  $MF$ . Dunque il punto  $M$  tende a percorrere simultaneamente sui raggi vettori  $fM, FM$ , due spazi uguali; perciò prendendo sul prolungamento di  $FM$  una porzione qualunque  $MB$ , e sopra  $Mf$  la porzione  $Mb = MB$ , e costruendo

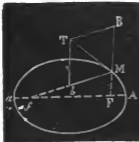


Fig. 274.

il parallelogrammo  $MbTB$  la diagonale  $TM$  sarà la tangente all'ellisse nel punto  $M$ . Si osservi che il parallelogrammo essendo qui una perfetta losanga gli angoli  $bMT, BMT$  sono uguali, cioè resta verificata la proprietà della tangente all'ellisse di dividere per metà l'angolo formato da un raggio vettore, e dal prolungamento dell'altro (§ 177).

## Nota al § 176.

Era già in torchio il § 176 quando mi giunse notizia della scoperta di un altro asteroide avvenuta il 15 aprile 1857. Nel corso della stampa dell'opera essendone stati successivamente scoperti dei nuovi, per completare la serie dei pianeti minori esposta nella nota 4 della pagina 128 aggiungeremo qui anco i seguenti secondo l'ordine però di loro scoperta:

(43) Arianna	(47) Senza nome
(44) Nisa	(48) Senza nome
(45) Eugenia	(49) Pale
(46) Senza nome	(50) Virgiuia

l'ultimo dei quali è stato scoperto il dì 4 ottobre 1857, e con esso si contano in tutti fino a qui settantotto pianeti che formano col sole il nostro sistema planetario.

## Nota ai §§ 201 al 209.

In pratica può avvenire di dover costruire una ellisse per circondare uno spazio vuoto, o ripieno d'acqua o contenente ogni altro ostacolo, che impedisca di

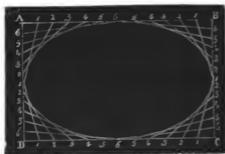


Fig. 275.

e eseguire una operazione qualunque. In tal caso i metodi che abbiamo indicati nella Lezione decimaprima per descrivere e costruire la Ellisse non potendo essere impiegati, qualche volta potrebbe convenire di sostituire un'altra curva che da essa poco differisca.

M. Durand ha suggerito l'idea della costruzione seguente. Sia tracciato intorno allo spazio o all'oggetto dato un rettangolo ABCD (fig. 275), di cui i lati opposti AB, DC sieno uguali in lunghezza all'asse maggiore, e i lati AD, BC uguali al minore della ellisse. Si divida ciascuno dei lati per esempio in 12 parti uguali, e si numerino progressivamente i punti di divisione di AB e BC dalle estremità verso il mezzo, e quelli di AD, BC, partendo dal mezzo verso le estremità, come indica la

figura. Se si uniscono i punti di divisione contrassegnati del medesimo numero, e appartenenti alle metà dei due lati adiacenti al medesimo angolo ne risulterà un poligono di 24 lati, e la curva che si farà passare per tutti i vertici di questo poligono potrà sostituirsi alla ellisse restando impossibile di poterne apprezzare a vista la differenza. La operazione essendo perfettamente la stessa della descrizione della parabola per mezzo del metodo delle tangenti (§ 141), è chiaro che ogni quarta parte della curva sarà in realtà un arco di parabola, ma quando l'ellisse debba essere molto allungata, la curva si confonde maggiormente con essa specialmente se si adotta la nostra divisione in 12 parti, piuttosto che quella in sedici parti adottata da alcuni pratici.

---



# INDICE DELLE MATERIE.

## DELLE CURVE IN GENERALE.

### LEZIONE PRIMA

*Definizioni. — Curvatura delle linee. — Curvatura delle superficie*

**Definizioni.** — § 1. Linea, pag. 1. — 2. Linee retta e curva, *ivi.* — 3. Loro specie, *ivi.* — 4. Curve piane e a doppia curvatura, *ivi.* — 5. Curve rientranti ed aperte, *ivi.* — 6. Esempi, 2. — 7. Concavità e convessità delle curve, *ivi.* — 8. Punto d'inflessione, *ivi.* — 9. Superficie piane e curvilinee, *ivi.* — 10. Concave e convesse, a semplice e doppia curvatura, *ivi.* — 11. Superficie concave-convesse, 3. — 12. Generazione delle superficie, *ivi.* — 13. Superficie e solidi di rivoluzione, *ivi.* — 14. Superficie sviluppabili, 4. — 15. Avvertenza, *ivi.*

**Curvatura delle linee.** — 16. La curvatura del circolo è uguale in ogni punto della circonferenza, *ivi.* — 17. Esempi, 5. — 18. La curvatura di due circoli è in ragione inversa dei raggi, 6. — 19. Curvatura della superficie della terra, *ivi.* — 20. Curvatura delle linee a semplice curvatura, 7. — 21. Circolo osculatore, raggio e centro di curvatura, *ivi.* — 22. Tangenti e normali, 8. — 23. Curvatura delle linee a doppia curvatura. Piano osculatore, 9.

**Curvatura delle superficie.** — 24. Linee di curvatura delle superficie, *ivi.* — 25. Divisione delle superficie rispetto alla curvatura, 10. — 26. Prima classe, *ivi.* — 27. Curvatura della sfera, *ivi.* — 28. Seconda classe, *ivi.* — 29. Terza classe, 11. — 30. Esempio, *ivi.* — 31. Linee di massima e minima curvatura, *ivi.* — 32. Esempi, *ivi.* — 33. Proprietà delle linee di curvatura, 12.

## LEZIONE SECONDA.

*Applicazioni della Curvatura. — Descrizione e costruzione delle Curve.*

**Applicazioni della curvatura.** — 34. Determinazione meccanica della curvatura delle sezioni, 13. — 35. Sferometro di Maiocchi, *ivi*. — 36. Modo di usarlo, 14. — 37. Idea dell'Autore di uno strumento per tracciare le linee di curvatura, 15. — 38. Importanza della curvatura nelle scienze e nelle arti, 16. — 39. Applicazioni alla Storia Naturale, *ivi*. — 40. Alla Fisica ed alla Chimica, *ivi*. — 41. Alla Idraulica, *ivi*. — 42. Alla Meccanica, *ivi*. — 43. All'Architettura navale, 17. — 44. All'Architettura in generale, *ivi*. — 45. Alle Belle Arti, *ivi*. — 46. All'Agricoltura, all'Ottica, alle arti del Carroziere, del Valigiaio, del Sarto, del Calzolaio *cc.*, *ivi*. — 47. Conclusione, 18.

**Descrizione delle curve.** — 48. Idea generale della costruzione delle curve, *ivi*. — 49. Condizioni per determinare la posizione di un punto, *ivi*. — 50. QUESITO PRIMO, *ivi*. — 51. Applicazione alla costruzione delle curve. Metodo delle intersezioni, 19. — 52. Limiti di questo metodo, *ivi*. — 53. Metodo delle visuali, 20. — 54. QUESITO SECONDO, *ivi*. — 55. Metodo misto, 21. — 56. Applicazione di questo metodo, *ivi*. — 57. Metodo delle curve, 22. — 58. QUESITO TERZO, 23. — 59. Metodo dei parallelogrammi, 24. — 60. Ordinate ed ascisse, *ivi*. — 61. Assi ortogonali ed ordinate rettangole, 25.

## LEZIONE TERZA.

*Continuità delle Curve. — Misura delle linee curve. — Misura delle superficie piane terminate da Curve.*

**Continuità delle curve.** — 62. Dei gradi di continuità, 26. — 63. Continuità per linee rette, *ivi*. — 64. Continuità per archi di cerchio, 27. — 65. Sua costruzione meccanica, *ivi*. — 66. Riga elastica, 28. — 67. Tiracurve, 29. — 68. Lamine flessibili, e copia curve, *ivi*.  
**Misura delle linee curve.** — 69. Unità di misura, 30. — 70. Misura per mezzo dei raggi di curvatura, 31. — 71. Rettificazione delle curve, *ivi*. — 72. Rettificazione meccanica, 32. — 73. Opisometro di Elliot, 33. — 74. Suoi difetti, 34. — 75. Opisometro contatore di Collignon, *ivi*. — 76. Applicazioni, 35.



**Misura delle superficie plane.** — 77. Quadratura di una superficie con perimetro curvilineo, 36. — 78. Metodo delle ordinate con intervallo costante, *ivi*. — 79. Suo grado di approssimazione, 37. — 80. Metodo di Simpson, 38. — 81. Dimostrazione della formula di Simpson, *ivi*. — 82. Lastra di calcolazione, 40. — 83. Quadratura per pesi, 41.

## LEZIONE QUARTA.

*Planimetro.* — *Misura delle superficie curve.* — *Misura dei solidi terminati da superficie curve.*

**Planimetro.** — 84. Scopo del Planimetro, 43. — 85. Planimetro del Gonnella. Suo principio Geometrico, 44. — 86. Suo Meccanismo principale, 45. — 87. Costruzione e suo modo di agire, 47.

**Misura delle superficie curve.** — 88. Idea generale della misura delle superficie curve, 49.

**Misura dei solidi terminati da superficie curve.** — 89. Applicazione alla cubatura del metodo di Simpson, 50. — 90. Fallacia dei metodi empirici, *ivi*. — 91. Metodo rigoroso di cubatura dei solidi, *ivi*. — 92. Esempio numerico, 53. — 93. Metodi fisici, 54.

## DELLE SEZIONI CONICHE.

### LEZIONE QUINTA.

*Genesi delle sezioni coniche.* — *Applicazioni alle ombre, all'equilibrio dei fluidi, all'Architettura ed alla Prospettiva.*

**Genesi delle sezioni coniche.** — 94. Definizione generale delle sezioni coniche, 56. — 95. Ogni sezione piana fatta pel vertice di un cono retto circolare è un triangolo isoscele, *ivi*. — 96. Corollari di questa proposizione, 57. — 97. Ogni sezione piana perpendicolare all'asse di un cono retto circolare è un circolo, *ivi*. — 98. Denominazione antica delle sezioni coniche propriamente dette, 58. — 99. Generazione, simmetria, asse e vertice delle sezioni coniche, 59. — 100. Generazione e definizione della parabola, 60. — 101. Generazione e definizione della ellisse, *ivi*. — 102. Generazione della ellisse dipendente dal cilindro, *ivi*. — 103. Generazione e definizione

della iperbole, 61. — 104. Generazione, asintoti e centro delle iperbole coniugate, ed equilatera, 62. — 105. Riepilogo delle sezioni coniche, 63.

**Applicazioni.** — 106. Ombre proiettate da un punto luminoso, 65. — 107. Effetti di luce diretta. Ombre proiettate, e luce portata dai raggi solari, *ivi*. — 108. Intersezioni delle superficie coniche e cilindriche colle superficie di equilibrio dei fluidi, 66. — 109. Applicazioni all'architettura, 67. — 110. Alla prospettiva, 68. — 111. Problemi che risolve la Geometria descrittiva, 69.

## Parabola.

### LEZIONE SESTA.

*Proprietà geometriche della parabola. — Tangenti e Normali. — Proprietà fisica.*

**Proprietà geometrica della parabola.** — 112. I quadrati delle ordinate stanno come le ascisse, 70. — 113. Legge geometrica di natura, 71. — 114. Il parametro è terzo proporzionale dopo l'ordinata e l'ascissa, 72. — 115. Fuoco, direttrice e raggio vettore, *ivi*. — 116. Ogni punto della parabola è ugualmente distante dal fuoco e dalla direttrice, 73. — 117. Proprietà delle ascisse e delle ordinate corrispondenti all'estremità di una corda, 74.

**Tangenti e normali.** — 118. Tangente, sotttangente, normale e sunnormale, 76. — 119. Dati l'asse ed il fuoco condurre la tangente col raggio vettore, *ivi*. — 120. Condurre la tangente per mezzo della sotttangente doppia della ascissa, 77. — 121. Condurre la normale per mezzo del raggio vettore, *ivi*. — 122. Condurre la normale per mezzo della sunnormale uguale alla metà del parametro, 78. — 123. Doppia soluzione per condurre la tangente da un punto preso fuori della curva, *ivi*. — 124. Condurre la normale da un punto preso fuori della curva, 79. — 125. Applicazioni delle normali all'architettura, 81.

**Proprietà fisica.** — 126. Gli angoli che la normale fa col raggio vettore, e colla parallela all'asse sono uguali, 82. — 127. Applicazioni all'Architettura, 83.

## LEZIONE SETTIMA.

*Diametri. — Determinazione degli elementi parabolici. —  
Descrizione e costruzione della parabola.*

**Diametri.** — 128. Diametro, ordinate ed ascisse al diametro, 85. — 129. Il diametro divide in mezzo tutte le corde parallele, *ivi*. — 130. **PROBLEMA.** Data la parabola determinare l'asse, il vertice, il parametro, la direttrice ed il fuoco, 86. — 134. Le tangenti all'estremità di una corda son divise da una terza in parti reciprocamente proporzionali, 87.

**Determinazione degli elementi parabolici.** — 132. Estensione della parabola considerata praticamente, 90. — 133. Condizioni e dati di costruzione, 91. — 134. **PROBLEMA PRIMO.** Dati due punti ed il fuoco determinare la direttrice ed il vertice, *ivi*. — 135. **PROBLEMA SECONDO.** Dati due punti e la direttrice determinare il fuoco ed il vertice, 92. — 136. **PROBLEMA TERZO.** Dati due punti e la tangente al vertice determinare il fuoco e la direttrice, *ivi*. — 137. Applicazione alla costruzione degli archi zoppi, 93.

**Descrizione e costruzione della parabola.** — 138. Metodo delle ordinate. Regola prima. Regola seconda, 94. — 139. Metodo dei raggi vettori, 95. — 140. Metodo delle corde, 96. — 141. Metodo delle tangenti, 97. — 142. Metodo delle secanti, 99. — 143. Applicazioni alla Geodesia, 100.

## LEZIONE OTTAVA.

*Compassi parabolici. — Misura della parabola. — Paraboloide. —  
Misura del Paraboloide.*

**Compassi parabolici.** — 144. Idea di un compasso fondato sulla prima regola del metodo delle ordinate, 102. — 145. Idea sulla seconda regola, 103. — 146. Metodo meccanico ordinariamente praticato, 104. — 147. Compasso fondato sull'uguaglianza delle distanze di un punto della curva dal fuoco e dalla direttrice, 105. — 148. Idea di un compasso dell'Autore, *ivi*.

**Misura della parabola.** — 149. Misura lineare, 107. — 150. Misura superficiale, *ivi*. — 151. Rapporto delle aree del settore parabolico e dello spazio esterno compreso fra la direttrice e l'arco del

settore, 408. — 452. Quadratura del segmento parabolico insistente sopra la corda perpendicolare all'asse, 410. — \* 453. Quadratura del segmento insistente sopra una corda qualunque, 411. — 454. Altra regola per riquadrare il segmento parabolico, *ivi*. — 455. Quadratura dello spazio parabolico compreso fra due corde parallele, 413.

**Paraboloidi.** — 456. Definizioni, 413. — 457. Applicazione alla costruzione de' riflettori, 444. — 458. Lampioni, *ivi*. — 459. Fari, 445. — 460. Portavoce, e trombe stentoree, 446. — 461. Cornetto acustico, *ivi*. — 462. Specchi ustorii, *ivi*.

**Misura del paraboloidi.** — 463. Quadratura della superficie paraboloidica, 417. — 464. Cubatura del volume del paraboloidi, 419.

## ELLISSE.

### LEZIONE NONA.

*Proprietà geometriche della Ellisse. — Applicazioni ed esempi. — Tangenti e Normali.*

**Proprietà geometriche della ellisse.** — 465. Assi e centro della ellisse, 420. — 466. Fuochi, raggi vettori, eccentricità, *ivi*. — 467. I quadrati delle ordinate stanno come i rettangoli delle ascisse, *ivi*. — 468. Rapporto del quadrato dell'ordinata al rettangolo delle ascisse, 424. — 469. Il parametro è terzo proporzionale dopo gli assi, 422. — 470. Rapporto del quadrato dell'ordinata al rettangolo delle ascisse rispetto all'asse minore. Corollari, *ivi*. — 471. Le ordinate della ellisse sono proporzionali alle ordinate del circolo descritto coi semiassi, 423. — 472. La somma dei raggi vettori è uguale all'asse maggiore, 424.

**Applicazioni.** — 473. Importanza della ellisse, 426. — 474. Arti di edificare e del falegname, *ivi*. — 475. Arti del vetraio, fabbro, caldaio, lattaio e giardiniere, del tornitore, intarsiatore, orafo, lapidario ed arti in generale, *ivi*. — 476. Legge Geometrica dell'Universo, 427.

**Tangenti e normali.** — 477. Dato l'asse maggiore ed i fuochi condurre la tangente coi raggi vettori in un punto preso sull'Ellisse, 434. — 478. Dato l'asse maggiore condurre la tangente colla perpendicolare ad un vertice, *ivi*. — 479. Condurre la tangente colla ascissa ed il semi-asse maggiore, 433. — 480. Dato l'asse maggiore ed i fuochi condurre la tangente ad un punto preso fuori della curva, 434. — 481. Condurre una tangente parallela o per-

pendicolare ad una retta data, 435. — 482. Condurre la normale da un punto preso sulla curva, *ivi*. — 483. Applicazioni, 436.

### LEZIONE DECIMA.

*Diametri. — Rapporti di posizione fra i diametri e le tangenti. — Determinazione degli elementi ellittici.*

**Diametri.** — 484. Ogni corda condotta pel centro dell'ellisse vi resta divisa per metà, 438. — 485. Diametri coniugati, 439. — 486. Un diametro divide per metà tutte le corde parallele al suo coniugato, *ivi*. — 487. Due corde condotte per due punti dell'asse maggiore o minore ugualmente distanti dal centro sono uguali, 441. — 488. PROBLEMA. Data una ellisse trovare il centro, gli assi, i fuochi ed il parametro, *ivi*.

**Rapporti di posizione fra i diametri e le tangenti.** — 489. Due tangenti condotte all'estremità di una corda s'incontrano nello stesso punto del diametro che la divide in mezzo, e viceversa. Corollario, 442. — 490. Da un punto dato fuori della ellisse condurre la tangente, 445.

**Determinazione degli elementi ellittici.** — 491. Condizioni e dati di costruzione per la ellisse, 446. — 492. PROBLEMA I. Dato un punto e l'asse minore trovare l'asse maggiore, *ivi*. — 493. PROBLEMA II. Dato un punto, e l'asse minore trovare l'asse maggiore, 447. — 494. PROBLEMA III. Dato di posizione un diametro che divida una retta qualunque trovare il suo coniugato, 448. — 495. Problema IV. Dati di posizione due diametri trovare gli assi, 449. — 496. Altra soluzione del problema, 450. — 497. Errori grafici del problema, *ivi*. — 498. PROBLEMA V. Dati un diametro ed una retta trovare la lunghezza del coniugato di nota direzione e gli assi, 451. — 499. Applicazione all'architettura, *ivi*. — 200. PROBLEMA VI. Dato un arco trovare il centro, due diametri coniugati, e gli assi della intera ellisse, 452.

### LEZIONE DECIMAPRIMA.

*Descrizione e costruzione della ellisse. — Compassi ellittici.*

**Descrizione e costruzione della ellisse.** — 201. Importanza delle proprietà della ellisse nella sua costruzione, 453. — 202. Metodo delle ordinate. Regola prima. Regola seconda, *ivi*. — 203.

Metodo dei raggi vettori, 155. — 204. Costruzione meccanica, *ivi.* — 205. Suoi inconvenienti nelle grandi costruzioni, 156. — 206. Metodo della somma, e della differenza degli assi, 157. — 207. Sua esecuzione meccanica, 158. — 208. Metodo delle ordinate ai diametri, *ivi.* — 209. Altro processo meccanico, 159.

**Compassi ellittici.** — 210. Descrizione Geometrico-meccanica della linea retta, 161. — 211. Compasso fondato sulla somma e differenza degli assi, 163. — 212. Compasso fondato sulla somma dei raggi vettori, 164. — 213. Altro compasso fondato sulla stessa proprietà, 165. — 214. Idea di un compasso dell'Autore, 167. — 215. Compasso fondato sulla proprietà dei diametri, 168.

## LEZIONE DECIMASECONDA.

*Combinazioni della Ellisse coi poligoni col circolo e colla Ellisse. — Misura della Ellisse. — Ellissoide. — Misura della Ellissoide.*

**Combinazioni della ellisse, col poligoni, col circolo e colla ellisse.** — 216. Combinazioni in genere, 170. — 217. Combinazione della ellisse coi poligoni, *ivi.* — 218. Col triangolo equilatero, 171. — 219. Col parallelogrammi, *ivi.* — 220. Applicazioni, 172. — 224. Col pentagono, *ivi.* — 222. Col circolo, *ivi.* — 223. Colla ellisse, 173. — 224. Ellissi concentriche, *ivi.* — 225. Caso notevole delle ellissi concentriche, *ivi.* — 226. Applicazioni, 174.

**Misura della ellisse.** — 227. Della misura lineare e della quadratura della ellisse, 175. — 228. Rapporto delle superficie della ellisse e del circolo descritto coi semiassi, *ivi.* — 229. Regola di quadratura della ellisse. Esempio, 176. — 230. Descrivere un circolo equivalente ad una ellisse, 177. — 231. Misura del segmento ellittico formato da due corde parallele ad uno degli assi, 178. — 232. Misura del settore ellittico, 179. — 233. Misura del segmento ellittico formato da una corda, *ivi.* — 234. Misura del segmento ellittico formato da due corde qualunque, *ivi.*

**Ellissoide.** — 235. Ellissoide allungata e compressa, *ivi.* — 236. Colori della sua generazione, 180. — 237. Costruzione meccanica della ellissoide, *ivi.* — 238. Applicazione all'architettura, 181. — 239. Riflettori ellissoidici, *ivi.* — 240. Intersezione della ellissoide, 182.

**Misura della ellissoide.** — 241. Misura della superficie ellissoidica, 183. — 242. Rapporto della ellissoide allungata alla compressa. Cubatura dell'Ellissoide, 184.

**Iperbola.**

## LEZIONE DECIMATERZA.

*Proprietà geometriche della Iperbola. — Diametri e Asintoti. — Tangenti e Normali. — Descrizione e costruzione della Iperbola. — Misura della Iperbola, e Iperboloide.*

**Proprietà geometriche della Iperbola.** — 243. Confronto colla ellisse, 185. — 244. Assi, fuochi, eccentricità, e raggi vettori della iperbola, *ivi.* — 245. Proprietà relative agli assi, 186.

**Diametri e asintoti.** — 246. Proprietà relative ai diametri, 187. — 247. Data una iperbola trovarne il centro, gli assi, i fuochi, ed il parametro, 188. — 248. Dati gli assi trovar gli asintoti e viceversa, 189. — 249. Dato un diametro limitato trovare il suo coniugato, *ivi.*

**Tangenti e normali.** — 250. Condurre una tangente ad un punto preso sulla curva, 191. — 251. Condurre una tangente ad un punto preso sulla curva per mezzo degli asintoti, 192. — 252. Condurre una tangente da un punto preso fuori della curva, *ivi.* — 253. Condurre la normale all'iperbola, 193. — 254. Applicazioni, 194.

**Descrizione e costruzione della Iperbola.** — 255. Metodo dei raggi vettori, *ivi.* — 256. Costruzione meccanica, 195. — 257. Compasso iperbolico, 196. — 258. Altro compasso, *ivi.* — 259. Metodo degli asintoti, 197.

**Misura dell' Iperbola, e Iperboloide.** — 260. Misura lineare dell'iperbola, 198. — 261. Quadratura dell'iperbola, *ivi.* — 262. Iperboloide di rivoluzione, *ivi.* — 263. Corollari della generazione della iperboloide, 199. — 264. Applicazioni, *ivi.* — 265. Misura della superficie della iperboloide, 201. — 266. Cubatura della iperboloide, *ivi.*

**DELLA CASSINOIDE, DELLA CATENARIA  
E DELLA LEMNISCATA.**

LEZIONE DECIMAQUARTA.

*Proprietà della Cassinoide. — Descrizione e costruzione della Cassinoide. — Applicazioni, tangenti e misura della Cassinoide. — Proprietà della Catenaria. — Descrizione e costruzione della Catenaria. — Tangenti e misura della Catenaria.*

**Cassinoide.**

**Proprietà della cassinoide.** — 267. Definizione della cassinoide, 203. — 268. Fuochi, raggi vettori, assi, centro e vertici, *ivi.* — 269. Simmetria della cassinoide, e valore del prodotto dei raggi vettori, 204. — 270. La differenza dei quadrati dei semiasi uguaglia il doppio del quadrato della eccentricità, *ivi.* — 271. Limiti della forma nella cassinoide, *ivi.* — 272. Cassinoide ovale — Cassinoide depressa, 205.

**Descrizione e costruzione della cassinoide.** — 273. PROBLEMA I. Dato l'asse maggiore ed i fuochi trovare l'asse minore della cassinoide corrispondente, 206. — 274. PROBLEMA II. Dati l'asse minore ed i fuochi trovare l'asse maggiore, *ivi.* — 275. PROBLEMA III. Dati gli assi trovare i fuochi, 207. — 276. Metodo delle quarte proporzionali, 208. — 277. Inconvenienti del metodo, *ivi.* — 278. Metodo delle terze proporzionali, 209.

**Applicazioni, tangenti e misura della cassinoide** — 279. Verificazioni della forma delle cassinoidi ovale e depressa, *ivi.* — 280. Applicazione, 210. — 281. Condurre la tangente e la normale da un punto della cassinoide, *ivi.* — 282. Misura, 214.

**Catenaria.**

**Proprietà della catenaria.** — 283. Definizione della Catenaria, *ivi.* — 284. Proprietà geometriche, 212. — 285. Proprietà meccanica, *ivi.* — 286. Applicazione alla architettura, 213. — 287. Applicazione ai ponti sospesi, *ivi.*

**Descrizione e costruzione della catenaria.** — 288. Processo meccanico, 214. — 289. Metodo geometrico, *ivi.*

**Tangenti e misura della catenaria.** — 290. Condurre la tangente e la normale da un punto preso sulla curva, 217. — 291. Misura della catenaria, 218.



**Lemniscata.**

## LEZIONE DECIMAQUINTA.

*Genesi e proprietà della Lemniscata. — Descrizione e costruzione della Lemniscata. — Applicazioni ed esempi.*

**Genesi e proprietà della lemniscata.** — 292. Definizione generale delle lemniscate, 219. — 293. Nodo, generatrice e direttrici, *ivi*. — 294. Lemniscate simmetriche, 220. — 295. Lemniscate regolari, *ivi*. — 296. Applicazioni alla ornativa, 221. — 297. Proprietà geometrica della lemniscata, *ivi*.

**Descrizione e costruzione della lemniscata.** — 298. Descrizione geometrica, *ivi*. — 299. Altra costruzione geometrica, 222. — 300. Altra costruzione, 223. — 301. Costruzione meccanica, 224. — 302. Costruzione meccanica della lemniscata regolare, 225.

**Applicazioni ed esempi.** — 303. Principio fondamentale Geometrico-Meccanico, 226. — 304. Sistema articolato pel moto parallelo, *ivi*. — 305. Altro sistema, 227. — 306. Avvertenze ed osservazioni, 228. — 307. Parallelogrammo di Watt, 229. — 308. Duplice proprietà geometrica di esso, 230. — 309. Legge geometrica di natura, 231. — 310. Tangenti, normali e misura della lemniscata, 232.

**DELLE SPIRALI.**

## LEZIONE DECIMASESTA.

*Genesi e applicazioni delle Spirali. — Spirale d' Archimede. — Spirale parabolica. — Spirale iperbolica. — Spirale logaritmica.*

**Genesi e applicazioni delle spirali.** — 311. Generazione della spirale, 234. — 312. Centro, raggio vettore, spire, spirali compatte e varietà delle spirali, *ivi*. — 313. Applicazioni ed esempi, 235. — 314. Avvertenza sulla loro costruzione, 236.

**Spirale d' Archimede.** — 315. Generazione, 236. — 316. Proprietà

- geometrica, 236. — 317. Circolo regolatore, polo, 237. — 318. Descrizione geometrica, *ivi*. — 319. Descrizione meccanica, 238. — 320. Compasso dell'Autore per descrivere la spirale d'Archimede, 239. — 321. Osservazioni, 241. — 322. Tangenti e normali, *ivi*. — 323. Misura della spirale d'Archimede, 242.
- Spirale parabolica.** — 324. Generazione costruzione e proprietà di essa, 244. — 325. Condurre la tangente e la normale alla spirale parabolica, 246.
- Spirale iperbolica.** — 326. Costruzione e proprietà di essa, *ivi*. — 327. Altra costruzione geometrica, 247. — 328. Applicazione all'architettura, 248. — 329. Tangenti e normali, 249.
- Spirale logaritmica.** — 330. Generazione e costruzione, *ivi*. — 331. Proprietà geometriche, 250. — 332. Applicazioni alla architettura ed alla meccanica, 251.

#### DELLE CURVE GENERATE DALLA ROTAZIONE DI UNA CURVA SOPRA UN'ALTRA.

#### LEZIONE DECIMASETTIMA.

*Genesi e definizioni generali. — Proprietà e costruzione geometrica della Evolvente. — Costruzione meccanica, tangenti e normali della Evolvente. — Applicazioni della Evolvente. — Generazione, proprietà e costruzione della Cicloide. — Normali e tangenti della Cicloide.*

**Genesi e definizioni generali.** — 333. Generazione di una curva di sviluppo, 252. — 334. Genitrice, deferente, punti di regresso, rami tangenti, e base delle curve di sviluppo, 253. — 335. Distinzioni delle curve di sviluppo. — Evolvente ed evoluta. — Cicloide. — Epicycloide, ed ipocicloide, *ivi*.

#### **Evolvente.**

**Costruzione e proprietà delle evolventi.** — 336. Costruzione della evolvente, 254. — 337. Proprietà geometriche, *ivi*. — 338. Evolvente di circolo, 255. — 339. Sua costruzione geometrica, 256. — 340. Evolvente spirale, *ivi*.

**Costruzione meccanica. — Tangenti e normali della**

- Evolvente.** — 341. Costruzione meccanica, 257. — 342. Simmetria dell'evolvente di circolo, 258. — 343. Tangenti e normali, 259.
- Applicazioni.** — 344. Applicazione alla architettura, *ivi.* — 345. Applicazione alla costruzione delle macchine, 261.

### Cicloide.

- Generazione, proprietà e costruzione della cicloide.** — 346. Generazione, base, altezza e vertice della cicloide, *ivi.* — 347. Proprietà della cicloide, 262. — 348. Costruzione geometrica della cicloide, 263. — 349. Costruzione meccanica, 264.
- Normali e tangenti della cicloide.** — 350. Normali e tangenti ad un punto della cicloide, 265. — 351. Normali e tangenti alle estremità ed al vertice della cicloide. Cicloide ovale, *ivi.* — 352. Proprietà del raggio di curvatura della cicloide, 266.

## LEZIONE DECIMOTTAVA.

*Applicazioni della Cicloide.* — *Misura della Cicloide.* — *Nozioni e proprietà generali delle Epicycloidi.* — *Descrizione e costruzione delle Epicycloidi.* — *Misura delle Epicycloidi.* — *Epicycloidi sferiche.*

**Applicazioni della cicloide.** — 353. Applicazione alla meccanica, 268. — 354. Applicazione all'architettura, *ivi.* — 355. Esame comparativo della cicloide, della ellisse e della cassinoide, 270. — 356. Curva Brachistocrona, 271. — 357. La cicloide è la curva delle discese della medesima durata, 272. — 358. Applicazione alla orologeria, 273.

**Misura della cicloide.** — 359. Misura lineare della intera cicloide, *ivi.* — 360. Misura lineare di un arco cicloidale, 274. — 361. Misura superficiale della intera cicloide, *ivi.* — 362. Misura di un segmento cicloidale, 275.

### Epicycloide.

**Nozioni e proprietà generali delle epicycloidi.** — 363. Descrizione della epicycloide, 276. — 364. Epicyclo, deferente, origine, base e simmetria della epicycloide, *ivi.* — 365. Singolarità delle epicycloidi, 277. — 366. Ipocicloidi, 278. — 367. Caso in cui la ipocicloide si confonda col diametro del deferente, 279. — 368. Applicazione e proprietà delle epicycloidi, 280. — 369. Tangente e normale, 280.

**Descrizione e costruzione delle epicicloidi.** — 370. Descrizione geometrica della epicicloide, 281. — 371. Epiciclografo, 282. — 372. Epiciclografo del marchese Ridolfi, ivi.

**Misura della epicicloide.** — 373. Misura lineare della intera epicicloide, 284. — 374. Misura di un arco epicicloideale, 285. — 375. Quadratura della epicicloide, 286.

**Epicicloidi sferiche.** — 376. Generazione e applicazione della epicicloide sferica, 287.

## DELLA SINUSOIDE, DELLA CONCOIDE E DELLE CURVE DI ESTRADOSSO.

### LEZIONE DECIMANONA.

*Definizioni e costruzione geometrica della Sinusoide. — Costruzione meccanica, tangenti e applicazione della Sinusoide. — Generazione e definizione della Concoide. — Descrizione e applicazione della Concoide. — Nozioni fondamentali delle Curve di Estradosso. — Descrizione delle Curve di Estradosso.*

#### Sinusoide.

**Definizioni e costruzione geometrica della sinusoide.** — 377. Definizione della sinusoide, 289. — 378. Asse, limiti, punti d'inflessione e base della sinusoide, 290. — 379. Costruzione geometrica della sinusoide, ivi.

**Costruzione meccanica, tangenti e applicazioni della sinusoide.** — 380. Costruzione meccanica, 292. — 381. Condurre la tangente e la normale alla sinusoide, 293. — 382. Applicazioni, 294.

#### Concoide.

**Generazione e definizioni della concoide.** — 383. Generazione della concoide, 295. — 384. Polo, direttrice e circolo regolatore. Concoide superiore e inferiore, 295.

**Descrizione e applicazione della concoide.** — 385. Descrizione geometrica, 296. — 386. Costruzione meccanica, 297. — 387. Applicazione all'architettura, ivi.

**Curve di estradosso.**

**Definizione e principi fondamentali.** — 388. Definizioni, 298. — 389. Principio meccanico a cui debbono soddisfare, *ivi.* — 390. Limite delle curve di estradosso, 299.

**Descrizione delle curve di estradosso.** — 391. Descrivere la curva di estradosso di una volta circolare, 300. — 392. Sua descrizione pratica, 301. — 393. Descrivere la curva d'estradosso di una volta gotica, *ivi.* — 394. Descrivere la curva di estradosso di una volta ellittica, 302. — 395. Osservazioni generali e casi eccezionali, 303. — 396. Curva di estradosso di una volta in catenaria, *ivi.* — 397. Curva di estradosso di una volta parabolica, 304.

**DELLE ELICHE.****LEZIONE VENTESIMA.**

*Nozioni generali ed esempi.* — *Generazione e descrizione geometrica dell'Elica cilindrica.* — *Descrizione meccanica dell'Elica cilindrica regolare e irregolare.* — *Superficie, applicazioni e misura dell'Elica cilindrica.* — *Generazione e descrizione dell'Elica conica.*

**Nozioni generali ed esempi.** — 398. Avvertenza, 305. — 399. Generazione dell'elica. Asse, spira e passo. Eliche cilindrica e conica. *ivi.* — 400. Prodotti naturali e artificiali, 306.

**Elica cilindrica.**

**Generazione e descrizione geometrica.** — 401. Generazione, asse, base e regolarità dell'elica, *ivi.* — 402. Descrizione geometrica, 308. — 403. Metodo più semplice, *ivi.* — 404. Rappresentazione dell'elica, 309. — 405. Eliche contrarie, 310.

**Costruzione meccanica dell'elica cilindrica regolare e irregolare.** — 406. Costruzione pratica, *ivi.* — 407. Macchina per disegnare l'elica, 311. — 408. Descrizione geometrica dell'elica a passo variabile, 312. — 409. Sua costruzione meccanica, *ivi.* —

**Superficie, applicazioni e misura.** — 410. Superficie elicoidale, 313. — 411. Applicazione alle viti, 314. — 412. Misura dell'elica. *ivi.* — 413. Misura della superficie elicoidale, *ivi.*

#### **Ellica conica.**

**Generazione e descrizione.** — 414. Generazione, 315. — 415. Descrizione geometrica, 316. — 416. Costruzione pratica, *ivi.* — 417. Costruzione meccanica, 318. — 418. Superficie elicoidale, *ivi.* — 419. Misura lineare e superficiale. *ivi.* — 420. Conclusione generale, 319.

#### NOTE AGGIUNTE.

Nota 1, al § 22. Condurre una tangente ad una curva qualunque da un punto preso su di essa, 321.

Nota 2, al § 22. Condurre una tangente ad una curva qualunque da un punto preso fuori di essa, 322.

Nota 3, al § 22. Condurre una tangente ad una curva qualunque parallelamente ad una retta data, 323.

Nota 4, al § 22. Condurre una normale ad una curva qualunque da un punto dato fuori di essa, 324.

Nota 5, al § 22. Metodo di Roberval sulla costruzione delle tangenti, *ivi.*

Nota al § 476. Sui pianeti minori, 326.

Nota ai §§ 201 al 209. Metodo di Durand sulla costruzione della elisse, *ivi.*

5788200

